医学部専門予備校　クエスト　解答速報

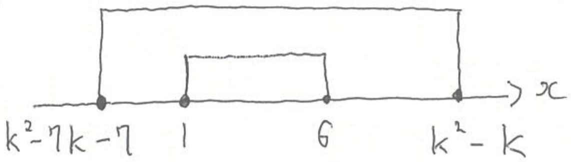
日本大学（医）前期一次試験　数学　　試験日 2 月 1 日（日）

Ⅰ (1) $x^2-2ax+a^2-9=0$ が $x=2$ を解にもつとき，

$a^2-4a-5=0$　$a>0$ より，$\underline{a=5}$

このとき，$x^2-10x+16=0 \Leftrightarrow x=2,\ \underline{8}$

(2)



$$\begin{cases} k^2-7k-7 \leqq 1 \\ 6 \leqq k^2-k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2-7k-8 \leqq 0 \\ k^2-k-6 \geqq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (k-8)(k+1) \leqq 0 \\ (k-3)(k+2) \geqq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leqq k \leqq 8 \\ k \leqq -2,\ 3 \leqq k \end{cases}$$ したがって，$\underline{3 \leqq k \leqq 8}$

(3) $(1+2i)^3 = 1^3+3\cdot1^2\cdot2i+3\cdot1\cdot(2i)^2+(2i)^3$

$=1+6i-12-8i=-11-2i$ より，$\underline{-13}$

(4) $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3,\ x_4=4,\ x_5=5,\ x_6=6,\ x_7=7$

$$\overline{x}=\frac{1+2+3+4+5+6+7}{7}=4$$

$$\overline{x^2}=\frac{1+4+9+16+25+36+49}{7}=20$$

$S_x^2=\overline{x^2}-\overline{x}^2=\underline{4}$（分散公式）

$X_k=0.25x_k\ (k=1,2,3,4,5,6,7)$ とする。

$\overline{X}=0.25\overline{x}$

$X_k-\overline{X}=0.25(x_k-\overline{x})$（偏差が 0.25 倍）より，

$S_X^2=S_x^2\times(0.25)^2=\underline{0.25}$（分散：偏差の 2 乗平均）

(5) $a_n = a + d(n-1)$ とする。

$S_4 - S_3 = 18$ より $a_4 = 18$ つまり $a + 3d = 18$

$S_5 - S_4 = 22$ より $a_5 = 22$ つまり $a + 4d = 22$

$(a, d) = (6, 4)$ 　　 $\underline{a_n = 4n + 2}$

II $\tan\theta = -\frac{4}{3}$ $\left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$

(1) $\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1 - (\tan\frac{\theta}{2})^2} = -\frac{4}{3}$ より、

$4(\tan\frac{\theta}{2})^2 - 6(\tan\frac{\theta}{2}) - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (2\tan\frac{\theta}{2} + 1)(\tan\frac{\theta}{2} - 2) = 0$

$\frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ より $\tan\frac{\theta}{2} > 1$ 　　 $\tan\frac{\theta}{2} = \underline{2}$

(2) $\tan\frac{3}{2}\theta = \tan\left(\theta + \frac{\theta}{2}\right)$

$$= \frac{\tan\theta + \tan\frac{\theta}{2}}{1 - \tan\theta \cdot \tan\frac{\theta}{2}} = \frac{-\frac{4}{3} + 2}{1 - \left(-\frac{4}{3}\right)\cdot 2} = \underline{\frac{2}{11}}$$

III $2^x + 2^{-x} = 3$ 両辺を2乗すると、$4^x + 4^{-x} = 17$

(1) $8^x + 8^{-x} = (2^x + 2^{-x})(4^x - 1 + 4^{-x}) = \underline{18}$

(2) $2^x + 2^{-x} = 3 \quad \cdots \times 2^x$

$\Leftrightarrow 4^x - 3\cdot 2^x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2^x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\Leftrightarrow \underline{x = \log_2 \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}$

IV　$N(\text{全}) = 8^5$

(1)　$N(1 \leqq a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 \leqq 8) = {}_8C_5 = \underline{56}$

(2)　$N(3 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq a_4 \leqq 6)$

$=$ ○○○○｜｜｜の並べ方 $= {}_7C_3 = \underline{35}$

例）○｜｜○○｜○ $\leftrightarrow (a_1, a_2, a_3, a_4) = (3, 5, 5, 6)$

(3)　$N(a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq a_4 = a_1 + 3)$

$a_1 = 1, 2, 3, 4, 5$ のときをそれぞれ調べる.

$N(1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq 4) =$ ○○｜｜｜の並べ方 $= {}_5C_2 = 10$

$N(2 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq 5) =$ ○○｜｜｜の並べ方 $= {}_5C_2 = 10$

$N(3 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq 6) =$ ○○｜｜｜の並べ方 $= {}_5C_2 = 10$

$N(4 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq 7) =$ ○○｜｜｜の並べ方 $= {}_5C_2 = 10$

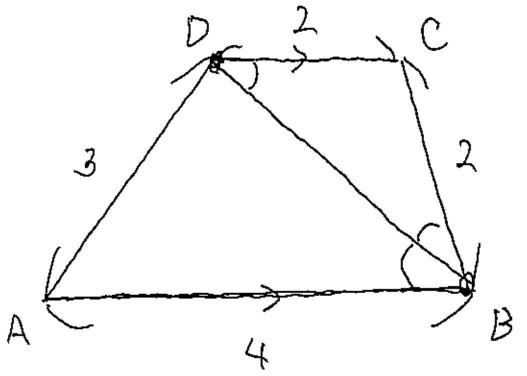
$N(5 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq 8) =$ ○○｜｜｜の並べ方 $= {}_5C_2 = 10$

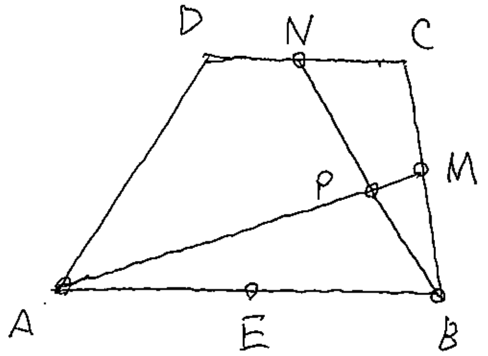
a_1 の最大値は $\underline{5}$

a_1 が最小のとき，$\underline{10}$ 通り

$N(a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq a_4 = a_1 + 3) = \underline{50}$

V





(1) $BD = x$ とする。上左図の印のついた角をθとする。

△ABD，△BCDにおいてそれぞれ余弦定理を用いると、

$$\cos\theta = \frac{x^2+16-9}{2\cdot4\cdot x} = \frac{x^2+4-4}{2\cdot2\cdot x}$$ より、$x=\sqrt{7}$

△ABDにおいて余弦定理より、

$$\cos\angle A = \frac{9+16-7}{2\cdot3\cdot4} = \frac{3}{4}$$

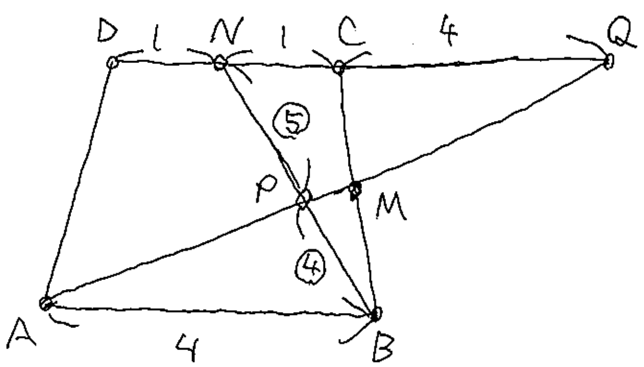
△ADEにおいて余弦定理より、

$DE^2 = 4+9-2\cdot2\cdot3\cdot\frac{3}{4} = 4$ より $\underline{DE=2}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 4\cdot3\cdot\frac{3}{4} = \underline{9}$

(2) $\triangle ABD = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AD}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD})^2} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$

(3) $\triangle BCD = \frac{1}{2}\triangle ABD = \frac{3\sqrt{7}}{4}$



$$\overrightarrow{AP} = \frac{5}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{AN}$$
$$= \frac{5}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{9}\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)$$
$$= \underline{\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{AD}}$$

$$\triangle BMP = \triangle BCN\times\frac{BP}{BN}\times\frac{BM}{BC} = \frac{3\sqrt{7}}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{7}}{12}$$

四角形 $PMCN = \triangle BCN - \triangle BMP = \frac{3\sqrt{7}}{8} - \frac{\sqrt{7}}{12} = \underline{\frac{7\sqrt{7}}{24}}$

VI　$f(x)=\dfrac{ax+2}{x^2+b}$ （すべての実数 x について連続）

$$f'(x)=\frac{a(x^2+b)-(ax+2)\cdot 2x}{(x^2+b)^2}=\frac{-ax^2-4x+ab}{(x^2+b)^2}$$

$f(1)=1$（極値）だから、

$\begin{cases} f(1)=1 \\ f'(1)=0 \end{cases}$ より、$\begin{cases} a-b=-1 & \cdots ① \\ ab-a=4 & \cdots ② \end{cases}$

① より $b=a+1$　② に代入し、

$a^2=4$　　$(a,b)=(2,3)\ (-2,-1)$

$f(x)=\dfrac{2x+2}{x^2+3}$ or $\dfrac{-2x+2}{x^2-1}$ であるが、

$f(x)$ がすべての実数 x について連続であることから、

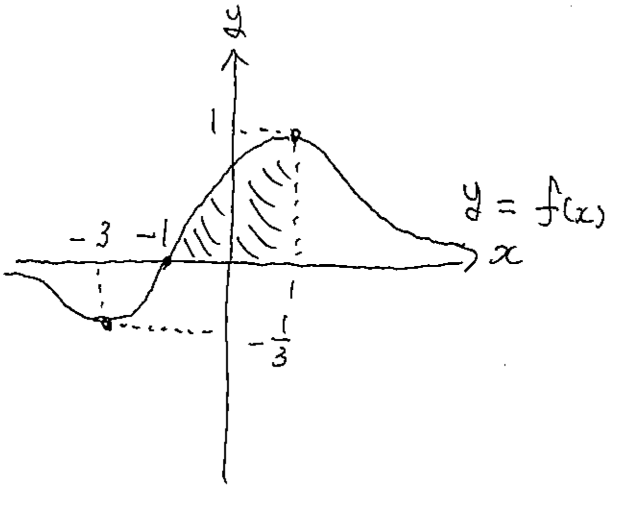
$f(x)=\dfrac{2x+2}{x^2+3}$ つまり $\underline{(a,b)=(2,3)}$

$$f'(x)=\frac{-2x^2-4x+6}{(x^2+3)^2}=-2\times\frac{(x+3)(x-1)}{(x^2+3)^2}$$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{3}$	↗	1	↘

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=0$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$



左図より、確かに

$f(1)=1$（極値）

となっている。

$y=f(x)$ のグラフと x 軸の交点は

$\underline{(-1,0)}$

$$\frac{V}{\pi}=\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=\int_{-1}^{1}\left(\frac{2x+2}{x^2+3}\right)^2dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{4x^2+8x+4}{(x^2+3)^2}dx=\int_{-1}^{1}\frac{4(x^2+3)+8x-8}{(x^2+3)^2}dx$$

$$=4\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+3}dx+4\int_{-1}^{1}\frac{1}{(x^2+3)^2}\cdot 2x\,dx-8\int_{-1}^{1}\frac{1}{(x^2+3)^2}dx$$

「$x=\sqrt{3}\tan\theta$」とおくと，$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}$

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+3}dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{3(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\Big[\theta\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{(x^2+3)^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{9(\tan^2\theta+1)^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{9}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{\sqrt{3}}{9}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{18}\Big[\theta\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}+\frac{\sqrt{3}}{36}\Big[\sin2\theta\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{18}\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{36}\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{54}\pi+\frac{1}{12}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{(x^2+3)^2}\cdot 2x\,dx=\left[-\frac{1}{x^2+3}\right]_{-1}^{1}=0$$

以上より，$V=\dfrac{8\sqrt{3}}{27}\pi^2-\dfrac{2}{3}\pi$