医学部専門予備校　クエスト　解答速報

日本医科大学　数学

試験日 2 月 2 日（月）

[I] 問1．1または5または6の目が1回、2または3または4の目が2回出る場合であるから、

$$P(N_1=1) = {}_3C_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8} \quad (答)$$

問2．2または5の目が1回、1または3または4または6の目が2回出る場合であるから、

$$P(N_2=1) = {}_3C_1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \quad (答)$$

問3．4の目が1回、1または2または3または5または6の目が2回出る場合であるから、

$$P(N_4=1) = {}_3C_1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{72} \quad (答)$$

問4．$N_1=1$ かつ $N_2=1$ となるのは、

(i) 5の目が1回、3または4の目が2回出る場合

(ii) 1または6の目が1回、2の目が1回、3または4の目が1回出る場合

のいずれかの場合であり、これらは排反であるから、

$$P(N_1=1 \text{ かつ } N_2=1) = {}_3C_1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3! \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

よって、求める条件付き確率は

$$P_{N_1=1}(N_2=1) = \frac{P(N_1=1 \text{ かつ } N_2=1)}{P(N_1=1)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{8}} = \frac{4}{9} \quad (答)$$

[Ⅱ] 問1．$\overrightarrow{AB}=(2,-1,-2)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,0,1)$ であり，平面πの法線ベクトルの1つを

$\vec{n}=(a,b,c)$ とすると，$\overrightarrow{AB}\perp\vec{n}$ かつ $\overrightarrow{AC}\perp\vec{n}$ より

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=2a-b-2c=0\\ \overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=-2a+c=0\end{cases}\quad \text{となるので}\quad \begin{cases}b=-2a\\ c=2a\end{cases}$$

よって，$\vec{n}=(1,-2,2)$ をとることができる。（注）外積 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-1,2,-2)$ から求めてもよい。）

これより，平面πの方程式は

$1\cdot(x-1)+(-2)\cdot(y-2)+2\cdot(z-4)=0$　　$\therefore\ \pi : x-2y+2z-5=0$　（答）

問2．点Dから平面πに下した垂線の足をHとすると，$\overrightarrow{DH}\parallel\vec{n}$ より $\overrightarrow{DH}=t\vec{n}$（$t$：実数）

とおくことができて，$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DH}=(2,4,1)+t(1,-2,2)=(t+2,-2t+4,2t+1)$

このとき，点H$(t+2,-2t+4,2t+1)$ は平面π上の点であるから，

$t+2-2(-2t+4)+2(2t+1)-5=0$　　$\therefore\ t=1$　　$\therefore\ H(3,2,3)$

よって，$\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{DH}$ に注意すると，

$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{OD}+2\cdot t\vec{n}=(2,4,1)+2(1,-2,2)=(4,0,5)$

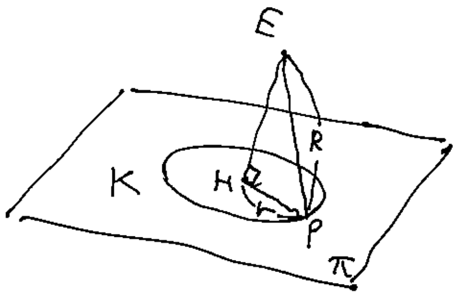
$\therefore$ E$(4,0,5)$（答）

問3．G$\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{8}{3}\right)$ であるから，球面Sの半径をRとすると，

$$R=EG=\sqrt{\left(\frac{4}{3}-4\right)^2+\left(\frac{7}{3}-0\right)^2+\left(\frac{8}{3}-5\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{7}{3}\right)^2+\left(-\frac{7}{3}\right)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

円Kの中心は，点Eから平面πに下した垂線の足Hとなるので，

Kの中心の座標はH$(3,2,3)$（答）



また，円Kの半径を r とすると，

$EH=|\overrightarrow{DH}|=|t\vec{n}|=|\vec{n}|=3$ より，

$r=\sqrt{R^2-EH^2}=\sqrt{18-9}=\sqrt{9}=3$ となり，

Kの半径は $r=3$（答）

問4．点Gから平面πに下した垂線の足をIとおくと，$\overrightarrow{GI}\parallel\vec{n}$ より

$\overrightarrow{GI}=k\vec{n}$（$k$：実数）とおくことができて，

$$\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GI}=\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{8}{3}\right)+k(1,-2,2)=\left(k+\frac{4}{3},-2k+\frac{7}{3},2k+\frac{8}{3}\right)$$

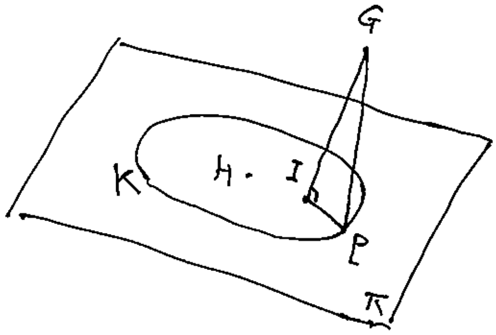
このとき，点 $I\left(k+\frac{4}{3},\ -2k+\frac{7}{3},\ 2k+\frac{8}{3}\right)$ は平面 π 上の点であるから，

$$k+\frac{4}{3}-2\left(-2k+\frac{7}{3}\right)+2\left(2k+\frac{8}{3}\right)-5=0 \qquad \therefore k=\frac{1}{3} \qquad \therefore I\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3},\frac{10}{3}\right)$$

すると，$HI=\sqrt{\left(\frac{5}{3}-3\right)^2+\left(\frac{5}{3}-2\right)^2+\left(\frac{10}{3}-3\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{2}<r=3$

となるので，点 I は円 K の内部にある。

このとき，



$$(d_P)^2=|\overrightarrow{GP}|^2=|\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IP}|^2$$

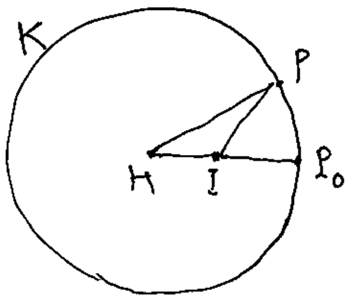
$$=|\overrightarrow{GI}|^2+2\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{IP}+|\overrightarrow{IP}|^2$$

$$=|\overrightarrow{GI}|^2+|\overrightarrow{IP}|^2 \quad \left(\because \overrightarrow{GI}\perp\overrightarrow{IP} \text{ より } \overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{IP}=0\right)$$

$$=|k\vec{n}|+|\overrightarrow{IP}|^2$$

$$=\frac{1}{3}|\vec{n}|+|\overrightarrow{IP}|^2$$

$$=1+|\overrightarrow{IP}|^2$$



よって $|d_P|^2$ の最小となるのは，$|\overrightarrow{IP}|$ が最小となる場合である。

ここで，$IP \geqq HP-HI=HP_0-HI=IP_0$ であるから，

右図で $P=P_0$ のとき IP は最小値 $HP-HI=r-\sqrt{2}=3-\sqrt{2}$ をとる。

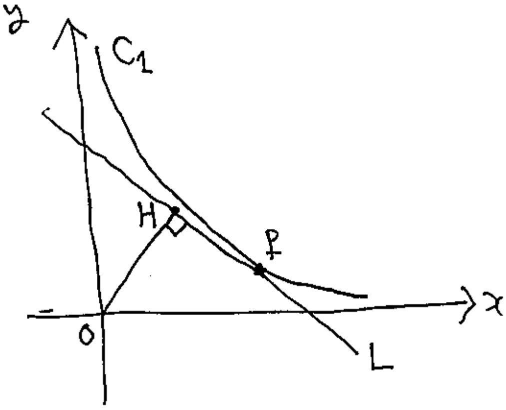
したがって，$(d_P)^2$ の最小値は，

$$1+(3-\sqrt{2})^2=12-6\sqrt{2} \quad (\text{答})$$

[Ⅲ] 問1　$y=\frac{1}{x}$ のとき $y'=-\frac{1}{x^2}$ より，接線Lの方程式は，

$$y-\frac{1}{t}=-\frac{1}{t^2}(x-t)\qquad \therefore\ L:\ y=-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t}\ \text{(答)}$$

問2．　$L: x+t^2y-2t=0$ より Lの法線ベクトルとして $\vec{n}=(1,t^2)$ をとれる．



$\overrightarrow{OH}/\!/\vec{n}$ より $\overrightarrow{OH}=k\vec{n}$ (k:実数) とおくことができて，$H(k, kt^2)$ がL上にあることより

$$k+t^2\cdot kt^2-2t=0$$

$$\therefore\ k=\frac{2t}{t^4+1}$$

$$\therefore\ H\left(\frac{2t}{t^4+1},\ \frac{2t^3}{t^4+1}\right)$$

これより，$x(t)=\dfrac{2t}{t^4+1}$，$y(t)=\dfrac{2t^3}{t^4+1}$ (答)

問3．$C(r): \left(x-1+\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(y-1+\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2=r^2$ となるから，C_2 と $C(r)$ の共有点でパラメータ t が満たす方程式は，

$$\left(\frac{2t}{t^4+1}-1+\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{2t^3}{t^4+1}-1+\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2=r^2$$

$$\frac{4t^2}{(t^4+1)^2}-2\left(1-\frac{r}{\sqrt{2}}\right)\frac{2t}{t^4+1}+\left(1-\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2$$
$$+\frac{4t^6}{(t^4+1)^2}-2\left(1-\frac{r}{\sqrt{2}}\right)\frac{2t^3}{t^4+1}+\left(1-\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2=r^2$$

$$\frac{4t^2(1+t^4)}{(t^4+1)^2}-2\left(1-\frac{r}{\sqrt{2}}\right)\frac{2t(1+t^2)}{t^4+1}+2\left(1-\sqrt{2}r+\frac{r^2}{2}\right)=r^2$$

$$\frac{4t^2}{t^4+1}-2\left(1-\frac{r}{\sqrt{2}}\right)\frac{2t(1+t^2)}{t^4+1}+2(1-\sqrt{2}r)=0$$

$$(1-\sqrt{2}r)(t^4+1)-2\left(1-\frac{r}{\sqrt{2}}\right)(t^3+t)+2t^2=0$$

$$(1-\sqrt{2}r)\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)-2\left(1-\frac{r}{\sqrt{2}}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right)+2=0$$

よって，$t+\frac{1}{t}=u$ とおくと，$t^2+\frac{1}{t^2}=u^2-2$ より

$$(1-\sqrt{2}r)(u^2-2)-(2-\sqrt{2}r)u+2=0$$

$$\therefore\ (1-\sqrt{2}r)u^2-(2-\sqrt{2}r)u+2\sqrt{2}r=0$$

ここで、$t=1$ に対応する $u=2$ は解であり、因数分解すると

$$(u-2)\{(1-\sqrt{2}r)u-\sqrt{2}r\}=0$$

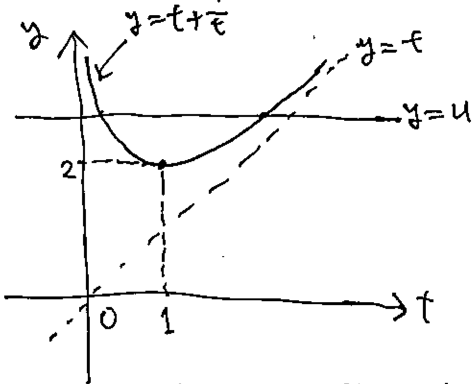
$$\therefore\ u=2,\ \frac{\sqrt{2}r}{1-\sqrt{2}r}$$

このとき、t の方程式 $t+\frac{1}{t}=u$ は、

右図より、

$$\begin{cases} u>2 \text{ のとき } 2\text{個} \\ u=2 \text{ のとき } 1\text{個} \\ 0<u<2 \text{ のとき } 0\text{個} \end{cases}$$

の実数解をもつ。



$y=t+\frac{1}{t}$ のとき $y'=\frac{(t+1)(t-1)}{t^2}$

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y		$\searrow$	2	$\nearrow$

$0<r<\frac{\sqrt{2}}{2}$ より $0<1-\sqrt{2}r<1$ に注意して

$\frac{\sqrt{2}r}{1-\sqrt{2}r}>2$ とすると、$\sqrt{2}r>2-2\sqrt{2}r$ $\quad\therefore\ r>\frac{\sqrt{2}}{3}$

以上より、

$$N(r)=\begin{cases} 1 & \left(0<r\leqq\frac{\sqrt{2}}{3} \text{ のとき}\right) \\ 3 & \left(\frac{\sqrt{2}}{3}<r<\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

（答）

[Ⅳ] 問1. (i) より

$$\int_0^t \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx = a\log\left(\frac{a+t}{a-t}\right) - t$$

両辺を t で微分して.

$$\frac{d}{dt}\int_0^t \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx = \frac{d}{dt}\left\{a\log(a+t) - a\log(a-t) - t\right\}$$

$$\sqrt{1+\{f'(t)\}^2} = \frac{a}{a+t} + \frac{a}{a-t} - 1$$

$$1+\{f'(t)\}^2 = \left(\frac{a^2+t^2}{a^2-t^2}\right)^2$$

$$\{f'(t)\}^2 = \frac{4a^2t^2}{(a^2-t^2)^2}$$

(ii) に注意して.

$$f'(t) = -\frac{2at}{a^2-t^2}$$

よって.

$$f(t) = \int\left(-\frac{2at}{a^2-t^2}\right)dt = a\int\frac{(a^2-t^2)'}{a^2-t^2}dt = a\log(a^2-t^2) + C$$

(C: 積分定数)

このとき. (iii) より

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = a\log\frac{3a^2}{4} + C = 0 \qquad \therefore C = -a\log\frac{3a^2}{4}$$

$$\therefore\ f(t) = a\log(a^2-t^2) - a\log\frac{3a^2}{4}$$

以上より. $f(x) = a\log(a^2-x^2) - a\log\dfrac{3a^2}{4}$ (答)

$0 \leqq x < a$ で $f'(x) = -\dfrac{2ax}{a^2-x^2} < 0$ ∴ 単調減少

$0 \leqq x < a$ で $f''(x) = -\dfrac{2a(a^2-x^2) - 2ax\cdot(-2x)}{(a^2-x^2)^2} = -\dfrac{2a^3+2ax^2}{(a^2-x^2)^2} = -\dfrac{2a(x^2+a^2)}{(a^2-x^2)^2} < 0$

∴ 上に凸

ここで.

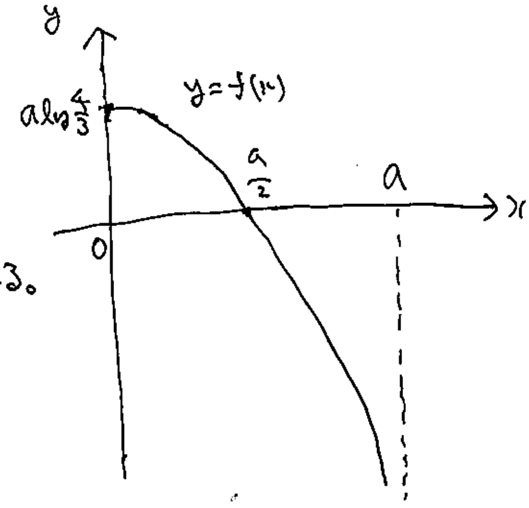
$$f(0) = a\log a^2 - a\log\frac{3a^2}{4} = a\log\frac{4}{3}$$

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = -\infty$$

$$f'(0) = 0$$

$$\lim_{x\to a-0} f'(x) = -\infty$$

に注意すると、グラフの概形は右図のようになる。



問2. $S_1(a)=\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)\,dx=\int_0^{\frac{a}{2}}\left\{a\log(a^2-x^2)-a\log\frac{3a^2}{4}\right\}dx$

$=\int_0^{\frac{a}{2}}\left\{a\log(a+x)+a\log(a-x)-a\log\frac{3a^2}{4}\right\}dx$

$=a\left[(a+x)\log(a+x)-(a+x)-(a-x)\log(a-x)+(a-x)-\left(\log\frac{3a^2}{4}\right)x\right]_0^{\frac{a}{2}}$

$=a\left(\frac{3a}{2}\log\frac{3a}{2}-\frac{3a}{2}-\frac{a}{2}\log\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\log\frac{3a^2}{4}\right)$

$=a\cdot\left(\frac{a}{2}\log\left\{\left(\frac{3a}{2}\right)^3\cdot\frac{2}{a}\cdot\frac{4}{3a^2}\right\}-a\right)=a\left(a\log 3-a\right)$

$=(\log 3-1)a^2$

また、$f'\left(\frac{a}{2}\right)=-\frac{2a\cdot\frac{a}{2}}{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=-\frac{a^2}{\frac{3}{4}a^2}=-\frac{4}{3}$ より

点Pでの接線Lの方程式は

$y=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{a}{2}\right)$

よって $Q\left(0,\frac{2}{3}a\right)$ となるので、点Rのy座標をy_Rとすると

$y_R=\frac{2-a}{2-a+1+a}\cdot\frac{2}{3}a=\frac{2a(2-a)}{9}$

これより $S_2(a)=\frac{1}{2}\cdot OP\cdot y_R=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{2a(2-a)}{9}=\frac{a^2(2-a)}{18}$

以上より

$S_1(a)-S_2(a)=(\log 3-1)a^2-\frac{a^2(2-a)}{18}=\frac{a^3}{18}-\left(\frac{1}{9}-\log 3+1\right)a^2$

$=\frac{a^2}{18}(a-20+18\log 3)$

ここで、$1.09<\log 3<1.10$ より

$0.2<20-18\log 3<0.38$

となるので

$$\begin{cases} 0<a<20-18\log 3 \text{ のとき、} S_1(a)<S_2(a) \\ a=20-18\log 3 \text{ のとき、} S_1(a)=S_2(a) \\ 20-18\log 3<a<1 \text{ のとき、} S_1(a)>S_2(a) \end{cases}$$ (答)