医学部専門予備校　クエスト　解答速報

杏林大学（医）　数学　試験日 2 月 2 日（月）

I. (a) $x=1+\cos t-\sqrt{5}\sin t$ …①

$y=1+\cos t+\sqrt{5}\sin t$ …②

①＋②，②－① より

$x+y=2+2\cos t$　　$\therefore \cos t=\dfrac{x+y-2}{2}$

$y-x=2\sqrt{5}\sin t$　　$\therefore \sin t=\dfrac{y-x}{2\sqrt{5}}$

$\cos^2 t+\sin^2 t=1$ より $\left(\dfrac{x+y-2}{2}\right)^2+\left(\dfrac{y-x}{2\sqrt{5}}\right)^2=1$

$5(x+y-2)^2+(y-x)^2=20$ …③

整理して $\dfrac{3}{4}(x^2+y^2)+xy-\dfrac{5}{2}(x+y)=0$ …(答)

$OP^2=x^2+y^2=(1+\cos t-\sqrt{5}\sin t)^2+(1+\cos t+\sqrt{5}\sin t)^2$

$=2(1+\cos t)^2+10\sin^2 t=2(1+2\cos t+\cos^2 t)+10(1-\cos^2 t)$

$=-8\cos^2 t+4\cos t+12$

$\cos t=u\ (-1\leqq u\leqq 1)$ とおくと

$OP^2=-8u^2+4u+12=-8\left(u-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{25}{2}$

$u=\dfrac{1}{4}$ のとき OP の最大値は $\sqrt{\dfrac{25}{2}}=\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$ …(答)

$x=1+\cos t-\sqrt{5}\sin t=1+\sqrt{6}\cos(t+\alpha)$ $\left(\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{6}},\ \sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right)$

x が最大になるのは $\cos(t+\alpha)=1$ のときで $t+\alpha=2\pi$ より

$\cos t=\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$，$\sin t=\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

このとき P の y 座標は $y=1+\dfrac{1}{\sqrt{6}}+\sqrt{5}\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right)=1-\dfrac{4}{\sqrt{6}}=1-\dfrac{2}{3}\sqrt{6}$ …(答)

③ より　$C:5(x+y-2)^2+(y-x)^2=20$

$\dfrac{(x+y-2)^2}{4}+\dfrac{(y-x)^2}{20}=1$

$X=x+y-2$，$Y=y-x$ とおくと $\dfrac{X^2}{4}+\dfrac{Y^2}{20}=1$

これは中心 $(0,0)$，長軸 Y 軸の楕円で焦点は $(0,\pm4)$

$X=0$，$Y=4$ のとき $y=3$，$x=-1$

$X=0$，$Y=-4$ のとき $y=-1$，$x=3$

よって　$E(-1,\ 3)$, $F(3,\ -1)$ …(答)

(b) $F(3, -1)$, $P(x, y)$ より

$\triangle OFP = \frac{1}{2}|-x-3y| = \frac{1}{2}|x+3y|$

ここで, $x+3y = (1+\cos t - \sqrt{5}\sin t) + 3(1+\cos t + \sqrt{5}\sin t)$

$= 4 + 2\sqrt{5}\sin t + 4\cos t = 4 + 6\sin(t+\beta)$ $\left(\sin\beta = \frac{2}{3}, \cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

$\sin(t+\beta) = 1$ のとき最大となり, $\triangle OFP$ の最大値は $\frac{1}{2}(4+6\cdot 1) = 5$ …(答)

このとき $t+\beta = \frac{\pi}{2}$ だから $\cos t = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \sin\beta = \frac{2}{3}$, $\sin t = \cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

となり, $x = 1 + \frac{2}{3} - \sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} = 0$, $y = 1 + \frac{2}{3} + \sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{10}{3}$ $\therefore P\left(0, \frac{10}{3}\right)$ …(答)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sin t + \sqrt{5}\cos t}{-\sin t - \sqrt{5}\cos t} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3} + \sqrt{5}\cdot\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3} - \sqrt{5}\cdot\frac{2}{3}} = -\frac{1}{3}$$

より P における接線の傾きは $\frac{-1}{3}$ …(答)

II. (a) $23 = 212_{(2)}$ より

$$\begin{array}{r|l} 3 & 23 \\ 3 & 7 \cdots 2 \\ & 2 \cdots 1 \end{array}$$

$f(23) = 2+1+2 = 5$ …(答)

$f(n) = 4$ をみたす n について, n を3進数にしたとき,

(ア) n が1桁ならば, 最大は $2_{(3)}$ で $f(n) \leqq 2$ より不適

(イ) n が2桁ならば, $a = 1, 2$, $b = 0, 1, 2$ として $n = ab_{(3)}$ とおくと

$f(n) = a+b = 4$ $\therefore (a, b) = (2, 2)$ $\therefore n = 22_{(3)} = 2\times 3 + 2 = 8$

(ウ) n が3桁ならば (イ)と同様にして $n = abc_{(3)}$ とおくと

$f(n) = a+b+c = 4$

・$a = 1$ のとき $b+c = 3$ であり, $b = 0$ とすると $c = 3$ となり不適.

$b = 1$ とすると $c = 2$

よって n が3桁のとき最小のものは $n = 112_{(3)} = 1\times 3^2 + 1\times 3 + 2 = 14$

(ア)〜(ウ)より2番目に小さい整数は 14 …(答)

任意の自然数 m を3進数で

$m = a_k a_{k-1} \cdots a_{0\,(3)}$ $(a_k \neq 0)$

と表すと, $3m = a_k a_{k-1} \cdots a_0 0_{(3)}$ で $f(3m) = a_k + a_{k-1} + \cdots + a_0 + 0 = f(m)$ ③ …(答)

$3m+1 = a_k a_{k-1} \cdots a_0 1$ より $f(3m+1) = f(m)+1$ ⑥ …(答)

$3m+2 = a_k a_{k-1} \cdots a_0 2$ より $f(3m+2) = f(m)+2$ ⑦ …(答)

したがって $f(2026) = f(3\cdot 675+1) = f(675)+1$

$f(675) = f(3\cdot 225) = f(225)$, $f(225) = f(3\cdot 75) = f(75)$

$f(75) = f(3\cdot 25) = f(25)$; $f(25) = f(3\cdot 8+1) = f(8)+1$

$f(8) = f(3\cdot 2+2) = f(2)+2$

$2 = 2_{(3)}$ より $f(2) = 2$

$f(2026) = f(2)+2+1+1 = 6$ …(答)

$3^m = \underbrace{100\cdots 0}_{m個}{}_{(3)}$ より $f(3^m) = 1$ …(答)

$(3^2-1 = 8 = 22_{(3)})$

$3^m-1 = \underbrace{22\cdots 2}_{m個}{}_{(3)}$ より $f(3^m-1) = 2\times m = 2m$ ② …(答)

$\dfrac{3^m-1}{2} = \dfrac{22\cdots 2_{(3)}}{2} = 11\cdots 1_{(3)}$ より $f\left(\dfrac{3^m-1}{2}\right) = m$ ① …(答)

(b) 合同式を用いる. $3\equiv 1 \pmod 2$ より $3^m \equiv 1^m \equiv 1 \pmod 2$ だから

3^m は 2 で割ると 1 余る. …(答)

$n = ABCD_{(3)}$ より $n = A\times 3^3 + B\times 3^2 + C\times 3 + D$

mod 2 で $n \equiv A\times 1^3 + B\times 1^2 + C\times 1 + D \equiv A+B+C+D \equiv f(n)$

よって $n - f(n) \equiv 0$ となり, $n - f(n)$ は 2 で割り切れる. ② …(答)

以下 mod 3 とする. $3\equiv 0$ より $n \equiv A\times 0 + B\times 0 + C\times 0 + D \equiv D$

よって $n - D \equiv 0$ となり, $n - D$ は 3 で割り切れる. ⑨ …(答)

(c) $80 = 81-1 = 3^4-1$ …(答) より $80 = 2222_{(3)}$

$f(80) = 2+2+2+2 = 8$ …(答)

3進数の和 $(a+b)$

a＼b	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

$k+(80-k) = 80 = 2222_{(3)}$

右の3進数の和の表より 和が2のとき

繰り上がりは起こらないので,

$f(k) + f(80-k) = f(k+(80-k)) = f(80) = 8$ …(答)

$\sum_{k=0}^{80} f(80-k) = f(80) + f(79) + \cdots + f(1) + f(0) = \sum_{k=0}^{80} f(k)$ だから

$\sum_{k=0}^{80} f(k) + \sum_{k=0}^{80} f(80-k) = 2\sum_{k=0}^{80} f(k)$ となり

$\sum_{k=0}^{80} f(k) = \frac{1}{2}\left\{\sum_{k=0}^{80} f(k) + \sum_{k=0}^{80} f(80-k)\right\} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{80}\{f(k)+f(80-k)\}$

$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{80} 8 = \frac{1}{2}\times 81\times 8 = 324$ …(答)

$2\times 3^{k-1} = \underbrace{200\cdots0}_{k-1個}{}_{(3)}$ だから $k \geqq 1$ のとき $f(2\times 3^{k-1}) = 2$

$\sum_{k=1}^{80} f(2\times 3^{k-1}) = 2\times 80 = 160$ …(答)

$\boxed{カ}$ より $\sum_{k=0}^{80} f(3k+2) = \sum_{k=0}^{80}\{f(k)+2\} = \sum_{k=0}^{80} f(k) + \sum_{k=0}^{80} 2$

$= 324 + 81\times 2 = 324 + 162 = 486$ …(答)

III (a) x軸およびy軸の交点の偏角θは $\frac{\pi}{2}\times$(整数)で表され、

$e^{-\frac{3}{4}\theta}$ はθの減少関数だから、A_kの偏角をθ_k $(k=0,1,2,\cdots)$

とすると、 $\theta_k = \frac{k\pi}{2}$ 　∴ $OA_k = 3e^{-\frac{3}{4}\cdot\frac{k\pi}{2}} = 3e^{-\frac{3\pi}{8}k}$, $OA_1 = 3e^{-\frac{3\pi}{8}} = \alpha$

これは初項 $OA_0 = 3$、公比 $\frac{OA_1}{OA_0} = e^{-\frac{3\pi}{8}} = \frac{1}{3}\alpha$ の等比数列であり、…(答)

$0 < e^{-\frac{3\pi}{8}k} < 1$ より $0 < \frac{1}{3}\alpha < 1$ だから

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} OA_k = \frac{3}{1-\frac{1}{3}\alpha} = \frac{9}{3-\alpha} \quad \cdots(答)$$

点A_0から点A_2までの曲線Dの長さをLとすると、$\theta_0 = 0$, $\theta_2 = \pi$ より

極座標での曲線の長さの公式を用いて、

$$L = \int_0^{\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

だから $\frac{dr}{d\theta} = -\frac{3}{4}\cdot 3e^{-\frac{3}{4}\theta} = -\frac{3}{4}r$ より $\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{r^2+\frac{9}{16}r^2} = \frac{5}{4}r = -\frac{15}{4}e^{-\frac{3}{4}\theta}$

となり、$L = \int_0^{\pi}\frac{15}{4}e^{-\frac{3}{4}\theta}d\theta = \left[\frac{15}{4}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)e^{-\frac{3}{4}\theta}\right]_0^{\pi} = -5\left(e^{-\frac{3}{4}\pi}-e^0\right) = 5\left(1-e^{-\frac{3}{4}\pi}\right)$

$e^{-\frac{3\pi}{8}} = \frac{\alpha}{3}$ より $e^{-\frac{3\pi}{4}} = \left(\frac{\alpha}{3}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{9}$ 　∴ $L = 5-\frac{5}{9}\alpha^2$ …(答)

(b) $\frac{dr}{d\theta} = -\frac{3}{4}r$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ より

$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta + r(-\sin\theta) = -\frac{3}{4}r\cos\theta - r\sin\theta$

$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta = -\frac{3}{4}r\sin\theta + r\cos\theta$

A_0 は $r=3$, $\theta=0$ だから A_0 において

$$\frac{dx}{d\theta}=-\frac{3}{4}\times 3=-\frac{9}{4}, \quad \frac{dy}{d\theta}=3$$

となり，A_0 における接線の傾きは $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{3}{-\frac{9}{4}}=-\dfrac{4}{3}$，

A_0 の直交座標は $(3, 0)$ だから，求める接線の方程式は

$$y=-\frac{4}{3}(x-3) \qquad \therefore y=-\frac{4}{3}x+4 \cdots (\text{答})$$

接線の方向ベクトルは $\left(\dfrac{dx}{d\theta}, \dfrac{dy}{d\theta}\right)$ だから，法線ベクトルは $\left(\dfrac{dy}{d\theta}, -\dfrac{dx}{d\theta}\right)$

ととれるから $B_n(r\cos\theta_n, r\sin\theta_n)$（直交座標）における接線の方程式は

$$\frac{dy}{d\theta}(x-r\cos\theta_n)-\frac{dx}{d\theta}(y-r\sin\theta_n)=0$$

$$r\left(-\frac{3}{4}\sin\theta_n+\cos\theta_n\right)(x-r\cos\theta_n)+r\left(\frac{3}{4}\cos\theta_n+\sin\theta_n\right)(y-r\sin\theta_n)=0$$

これが $A_0(x, y)=(3, 0)$ を通るとき，

$$r\left(-\frac{3}{4}\sin\theta_n+\cos\theta_n\right)(3-r\cos\theta_n)+r\left(\frac{3}{4}\cos\theta_n+\sin\theta_n\right)(-r\sin\theta_n)=0$$

$$r\left\{-\frac{9}{4}\sin\theta_n+3\cos\theta_n-r(\cos^2\theta_n+\sin^2\theta_n)\right\}=0$$

$r=3e^{-\frac{3}{4}\theta}>0$ より $\quad -\dfrac{9}{4}\sin\theta_n+3\cos\theta_n-r=0$

$$r=3\left(\cos\theta_n-\frac{3}{4}\sin\theta_n\right) \quad \therefore 3e^{-\frac{3}{4}\theta_n}=3\left(\cos\theta_n-\frac{3}{4}\sin\theta_n\right)$$

よって $\quad e^{-\frac{3}{4}\theta_n}=\cos\theta_n-\dfrac{3}{4}\sin\theta_n \quad \cdots ①$

OB_n は n の減少数列 だから $n\to\infty$ のとき $\theta_n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}OB_n=\lim_{n\to\infty}3e^{-\frac{3}{4}\theta_n}=0 \quad \cdots (\text{答})$$

① より $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\cos\theta_n-\frac{3}{4}\sin\theta_n\right)=0$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos\theta_n=0$ とすると $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sin\theta_n=0$ となり，不適だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos\theta_n\neq 0$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{4}\tan\theta_n\right)=0 \qquad \therefore \lim_{n\to\infty}\tan\theta_n=\frac{4}{3} \cdots (\text{答})$$

(c) 直交座標で $A_0(3,0)$, $Q(r\cos t, r\sin t)$ $(r=3e^{-\frac{3}{4}t})$

$x=r\cos t$, $y=r\sin t$ とおくと, $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{dr}{dt}\cos t-r\sin t=-\dfrac{3}{4}r\cos t-r\sin t=-r\left(\dfrac{3}{4}\cos t+\sin t\right)$

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dr}{dt}\sin t+r\cos t=-\dfrac{3}{4}r\sin t+r\cos t=r\left(-\dfrac{3}{4}\sin t+\cos t\right)$

$\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=\dfrac{25}{16}r^2$, $|\overrightarrow{OQ}|=r$, $\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)\cdot\overrightarrow{OQ}=-\dfrac{3}{4}r^2$

だから $|\vec{q}|=r$, $|\vec{v}|=\dfrac{5}{4}r$, $\vec{q}\cdot\vec{v}=-\dfrac{3}{4}r^2$ より

$\cos\phi=\dfrac{\vec{q}\cdot\vec{v}}{|\vec{q}||\vec{v}|}=\dfrac{-\frac{3}{4}r^2}{r\cdot\frac{5}{4}r}=-\dfrac{3}{5}$ …(答)

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\dfrac{dr}{dt}\left(\dfrac{3}{4}\cos t+\sin t\right)-r\left(-\dfrac{3}{4}\sin t+\cos t\right)$

$=-\left(-\dfrac{3}{4}r\right)\left(\dfrac{3}{4}\cos t+\sin t\right)-r\left(-\dfrac{3}{4}\sin t+\cos t\right)$

$=r\left(\dfrac{3}{2}\sin t-\dfrac{7}{16}\cos t\right)$

$\dfrac{d^2y}{dt^2}=r\left(-\dfrac{7}{16}\sin t-\dfrac{3}{2}\cos t\right)$　$\vec{a}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}, \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$, $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$ より

$2\vec{a}+m\vec{v}+n\vec{q}=\vec{0}$ とおくと. $r\left(3\sin t-\dfrac{7}{8}\cos t-\dfrac{3}{4}m\cos t-m\sin t+n\cos t\right)=0$ (x成分)

$r\left(-\dfrac{7}{8}\sin t-3\cos t-\dfrac{3}{4}m\sin t+m\cos t+n\sin t\right)=0$ (y成分)

$$\begin{cases}\sin t(3-m)+\cos t\left(-\dfrac{7}{8}-\dfrac{3}{4}m+n\right)=0\\ \sin t\left(-\dfrac{7}{8}-\dfrac{3}{4}m+n\right)+\cos t(-3+m)=0\end{cases}$$

これがすべての t で成り立つから, $3-m=0$, $-\dfrac{7}{8}-\dfrac{3}{4}m+n=0$　∴ $m=3$, $n=\dfrac{25}{8}$

すなわち $2\vec{a}+3\vec{v}+\dfrac{25}{8}\vec{q}=\vec{0}$ …(答)

$2z^2+3z+\dfrac{25}{8}=0$ より $16z^2+24z+25=0$

これを解いて $z=\dfrac{-12\pm\sqrt{12^2-16\cdot 25}}{16}=\dfrac{-12\pm\sqrt{12^2-20^2}}{16}=\dfrac{-12\pm\sqrt{-32\cdot 8}}{16}=\dfrac{-12\pm 16i}{16}$

だから $z=\dfrac{-3}{4}\pm i$ を解にもつ. …(答)

（講評）

3問とも計算も多く，考え方も難しいので，とても時間内に解ききるのは無理である．

I．斜めの楕円の扱い方がポイントになる．$x+y-2=0$ と $y-x=0$ が直交しているので，楕円の短軸，長軸に対応する．

II．3進数の各位の和に関する問題で，わかりにくいときは具体的な数で確かめるとよい．

III．極座標に関する問題で，曲線の長さは極座標で計算すると速い．(c)は速度ベクトル，加速度ベクトルを求めて，計算することになるから，計算量はかなり多い．

どの問題もとれるものをとって半分位とれればよい．