医学部専門予備校　クエスト　解答速報

順天堂大学（医）　数学

試験日2月3日（火）

I (1) (a) $2^{x-2}=t\ (t>0)$ とおくと

$t-\frac{1}{t}=\frac{31\sqrt{2}}{8}$　　∴ $8t^2-31\sqrt{2}\,t-8=0$

よって $(8t+\sqrt{2})(t-4\sqrt{2})=0$ となり $t>0$ だから $t=4\sqrt{2}$

したがって $2^{x-2}=2^{\frac{5}{2}}$　∴ $x-2=\frac{5}{2}$　∴ $x=\frac{9}{2}$ …(答)

(b) 真数，底の条件から $x>0$ かつ $x\neq1$ であり，与方程式の両辺の

2を底とする対数をとると

$$\log_2 x^{3+\log_2 x}=\log_2 4^{\log_x 4}$$

$(3+\log_2 x)\log_2 x=\log_x 4\cdot\log_2 2^2$

これを整理して $(\log_2 x)^3+3(\log_2 x)^2-4=0$　∴ $(\log_2 x-1)(\log_2 x+2)^2=0$

$\log_2 x=-2,\ 1$ となり $x=\frac{1}{4},\ 2$ （$x>0$ かつ $x\neq1$ をみたす） …(答)

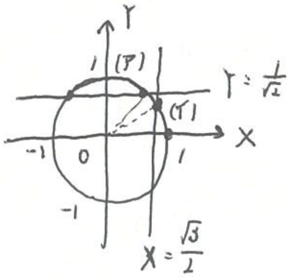
(c) 2倍角の公式を用いて，$4\sin x\cos x-2\sqrt{3}\sin x-2\sqrt{2}\cos x+\sqrt{6}\leqq0$

左辺を因数分解して，$(2\sin x-\sqrt{2})(2\cos x-\sqrt{3})\leqq0$

(ア) $\sin x\geqq\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos x\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$ または (イ) $\sin x\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos x\geqq\frac{\sqrt{3}}{2}$

よって，$0\leqq x\leqq\pi$ から

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq\frac{3}{4}\pi$ …(答)



(2) (a) さいころの目が k で，k枚のコインを投げて表が1枚も出ない

確率は $\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{2}\right)^k$ で，$k=1,2,3,4,5,6$ だから，求める確率は

$$\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{\frac{1}{12}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{64}\right)=\frac{21}{128}\ \cdots(答)$$

(b) さいころの目がkで，k枚のコインを投げて表が1枚だけ出る

確率は $\frac{1}{6}\times{}_kC_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{k}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^k$

$k=1,2,3,4,5,6$ だから，求める確率は

$$\sum_{k=1}^{6}\frac{k}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{6}\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4+5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5+6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}=\frac{5}{16}\quad\cdots(答)$$

(c) 2個のさいころの目の和とその確率を表で表すと下のようになる.

目の和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

k 枚のコインを投げて1枚だけ表が出る確率は ${}_kC_1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=k\left(\frac{1}{2}\right)^k$

よって，求める確率は

$$\frac{1}{36}\cdot 2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2}{36}\cdot 3\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{3}{36}\cdot 4\left(\frac{1}{2}\right)^4+\frac{4}{36}\cdot 5\left(\frac{1}{2}\right)^5+\frac{5}{36}\cdot 6\left(\frac{1}{2}\right)^6+\frac{6}{36}\cdot 7\left(\frac{1}{2}\right)^7$$

$$+\frac{5}{36}\cdot 8\left(\frac{1}{2}\right)^8+\frac{4}{36}\cdot 9\left(\frac{1}{2}\right)^9+\frac{3}{36}\cdot 10\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+\frac{2}{36}\cdot 11\left(\frac{1}{2}\right)^{11}+\frac{1}{36}\cdot 12\left(\frac{1}{2}\right)^{12}$$

$$=\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{2^{10}}\left(512+768+768+640+480+336+160+72+30+11+3\right)$$

$$=\frac{3780}{36\cdot 1024}=\frac{105}{1024}\quad\cdots(答)$$

(3) (a) b を変数とみて，$\dfrac{d}{db}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\dfrac{d}{db}\left(\dfrac{b^3-a^3}{3}\right)$ より $f(b)=b^2$ だから $f(x)=x^2$ となる.

逆に，$f(x)=x^2$ のとき $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\dfrac{b^3-a^3}{3}$ は明らか. よって必要十分条件である. (A)…(答)

(b) p：$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ は無理数である，q：$\sqrt{ab}$ は無理数である，とする.

$a=2,\ b=2$ とすると $\sqrt{a}+\sqrt{b}=2\sqrt{2}$ は無理数であるが，$\sqrt{ab}=2$ となり q は成り立たない. $\therefore\ p\not\Rightarrow q$

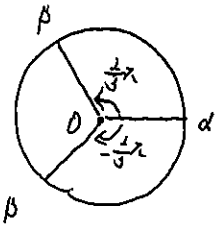
$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ が有理数と仮定すると $\sqrt{a}+\sqrt{b}=p$（有理数）とおけ，$a+b+2\sqrt{ab}=p^2$ より

$\sqrt{ab}=\dfrac{p^2-(a+b)}{2}$ となり，$\sqrt{ab}$ が無理数であることに反する. $\therefore\ q\Rightarrow p$

よって，必要条件であるが，十分条件でない. (B)…(答)

(c) 因数定理より，必要十分条件である. (A)…(答)

(d) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=0$，$\beta\neq 0$ より $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2+\dfrac{\alpha}{\beta}+1=0$



$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos\left(\pm\dfrac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{2}{3}\pi\right)$（複号同順）

このとき $\angle AOB=120^\circ$，$OA=OB$ の二等辺三角形となる.

逆に，$A(1)$，$B(i)$ とすると $OA=OB$ の二等辺三角形であるが，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=0$ は成り立たない. よって，十分条件だが必要条件でない. (C)…(答)

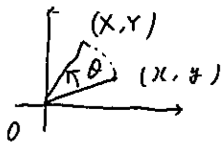
(e) $s+t=1$ のとき，たとえば $s=\frac{3}{2},\ t=-\frac{1}{2}$ とおくと，P は AB の外分点となる．

逆に，P が AB の内分点のとき，$s+t=1$ は成り立つ．

よって 必要条件であるが，十分条件でない．　(B) …(答)

$\boxed{\text{Ⅱ}}$ (1)　$(x-1)^2+2(y+2)^2=4$ より $x^2+2y^2-2x+8y+5=0$ …(答)

(2) $X+iY=(\cos\theta+i\sin\theta)(x+iy)$



より，$\alpha=\cos\theta,\ \beta=\sin\theta$

$\boxed{エ}$ (C)　$\boxed{オ}$ (A) …(答)

さらに，$X+iY=(x\cos\theta-y\sin\theta)+i(x\sin\theta+y\cos\theta)$

だから，$X=(\cos\theta)x+(-\sin\theta)y$，$Y=(\sin\theta)x+(\cos\theta)y$

$\boxed{カ}$ (C)　$\boxed{キ}$ (B)　$\boxed{ク}$ (A)　$\boxed{ケ}$ (C) …(答)

(3) $C_2: 3x^2+4\sqrt{3}xy-y^2=A$ を x 軸方向に B，y 軸方向に C だけ平行移動した曲線が C_1 とすると（B, C は自然数），

$C_1: 3(x-B)^2+4\sqrt{3}(x-B)(y-C)-(y-C)^2=A$

これを整理して，$3x^2+4\sqrt{3}xy-y^2-(6B+4\sqrt{3}C)x+(-4\sqrt{3}B+2C)y+3B^2+4\sqrt{3}BC-C^2-A=0$

よって，係数を比較して

$$\begin{cases} 6B+4\sqrt{3}C=12+4\sqrt{3} & \cdots① \\ -4\sqrt{3}B+2C=-8\sqrt{3}+2 & \cdots② \\ 3B^2+4\sqrt{3}BC-C^2-A=-4+8\sqrt{3} & \cdots③ \end{cases}$$

①，②より $B=2,\ C=1$，③に代入して $A=15$ …(答)

C_3 上の点 (x,y) を原点のまわりに $\frac{\pi}{6}$ 回転すると C_2 上の点 (X,Y) に移るとすると，(2)の①より

$X=x\cos\frac{\pi}{6}-y\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y$，$Y=x\sin\frac{\pi}{6}+y\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y$

これらを $C_2: 3X^2+4\sqrt{3}XY-Y^2=15$ に代入して

$3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y\right)^2+4\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y\right)\left(\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2=15$

整理して　$5x^2-3y^2=15$ …(答)

すなわち　$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$ となるから，C_3 の焦点は $(\pm\sqrt{3+5},0)=(\pm2\sqrt{2},0)$ …(答)

漸近線は $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}x$　∴ $y=\pm\frac{\sqrt{15}}{3}x$ …(答)

C_1の漸近線の交点は，C_3の漸近線の交点$(0,0)$を原点のまわりに$\frac{\pi}{6}$回転してx軸方向に2，y軸方向に1だけ平行移動した点であるから，

$(\boxed{\text{ア}},\boxed{\text{イ}})=(2,1)$ … (答).

C_1の漸近線はC_3の漸近線を原点のまわりに$\frac{\pi}{6}$回転して平行移動したものだから，C_3の漸近線の傾きを$\tan\alpha=\pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$として，$C_1$の漸近線の傾きは$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$で表される．求める傾きは

$$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{\pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1\mp\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{\pm\sqrt{15}+\sqrt{3}}{3\mp\sqrt{5}}$$

$$=\frac{(\pm\sqrt{15}+\sqrt{3})(3\pm\sqrt{5})}{(3\mp\sqrt{5})(3\pm\sqrt{5})}=\frac{\pm3\sqrt{15}+5\sqrt{3}+3\sqrt{3}\pm\sqrt{15}}{9-5}=2\sqrt{3}\pm\sqrt{15}\quad\cdots\text{(答)}$$

$\boxed{\text{III}}$ (1) $$\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x\text{ より }(\sin x)'=\cos x$$

(2) $f(x)=x-\sin x$ とおくと　$f'(x)=1-\cos x\geqq0$

$f(0)=0$ と合わせて　$x\geqq0$ のとき　$f(x)\geqq0$　$\therefore\ \sin x\leqq x$

(3) $$S_n'(x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(x^{2k-1})'}{(2k-1)!}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(2k-1)x^{2k-2}}{(2k-1)!}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!}=T_n(x)$$

$$T_n'(x)=\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(x^{2k-2})'}{(2k-2)!}=\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-3}}{(2k-3)!}\quad\left(k=1のとき\ (-1)^0\cdot\frac{x^0}{0!}=1\text{ より微分して }0\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}=-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}=-S_{n-1}(x)\quad(n\geqq2)$$

だから　$F_n'(x)=(-1)^{n-1}\{S_n'(x)-\cos x\}=(-1)^{n-1}\{T_n(x)-\cos x\}=G_n(x)$

$n\geqq2$ のとき　$G_n'(x)=(-1)^{n-1}\{T_n'(x)+\sin x\}=(-1)^{n-1}\{-S_{n-1}(x)+\sin x\}$

$$=(-1)^{n-1}\cdot(-1)\{S_{n-1}(x)-\sin x\}=(-1)^{n-2}\{S_{n-1}(x)-\sin x\}=F_{n-1}(x)$$

以下数学的帰納法により $F_n(x) \geqq 0$ および $G_n(x) \geqq 0$ …Ⓐ を示す.

(i) $n=1$ のとき $S_1(x)=x$, $T_1(x)=1$ より

$F_1(x)=x-\sin x \geqq 0$ （∵(2)）

$G_1(x)=1-\cos x \geqq 0$

だから Ⓐは成り立つ.

(ii) $n=k$ のとき, Ⓐが成り立つと仮定すると $F_k(x) \geqq 0$, $G_k(x) \geqq 0$

$G_{k+1}'(x)=F_k(x) \geqq 0$

$G_{k+1}(0)=(-1)^k(1-1)=0$

より $G_{k+1}(x) \geqq 0$

$F_{k+1}'(x)=G_{k+1}(x) \geqq 0$

$F_{k+1}(0)=0$

より $F_{k+1}(x) \geqq 0$

したがって, $n=k+1$ のときもⒶは成り立つ.

(i)(ii)によりすべての自然数について, $F_n(x) \geqq 0$, $G_n \geqq 0$ が成り立つ.

(4) $F_n(1)=(-1)^{n-1}\{S_n(1)-\sin 1\}$

$S_n(x)=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

より $S_n(1)=1-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{120}-\dfrac{1}{7!}+-\cdots$

n の偶奇によって $S_n(1)$ と $\sin 1$ の大小が変わることに着目して

$F_2(1)=-\{S_2(1)-\sin 1\} \geqq 0$ 　∴ $S_2(1) \leqq \sin 1$

$F_3(1)=S_3(1)-\sin 1 \geqq 0$ 　∴ $S_3(1) \geqq \sin 1$

すなわち $S_2(1) \leqq \sin 1 \leqq S_3(1)$

$S_2(1)=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}=0.833\cdots>0.83$

$S_3(1)=1-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{120}=0.8416\cdots<0.85$

だから $0.83<\sin 1<0.85$

＜講評＞

Ⅰ (1) はいろいろな方程式・不等式で、典型的な問題で標準レベルである。

(2) はさいころの目を見て、コインの投げる回数を決めて、コインを投げるときに表が何枚出るかを考える確率で、考え方は難しくなく、(c) のみ計算量が多い。

(3) 必要十分条件の判定の問題で、どれも標準的である。

Ⅱ 2次曲線（楕円、双曲線）の平行移動、回転を扱った問題で、誘導もあるし、よく出てくるタイプの設問なので、標準的である。

Ⅲ 導関数の証明、不等式の証明、$\sin 1$ の評価の記述式の問題で、(1)(2) は基本で、(3) について、$S_n'(x)$、$T_n'(x)$ を計算してみれば、数学的帰納法が見えてくる。

(4) は $F_n(x)$ で $x=1$ とすれば $\sin 1$ が出てくるので あとは簡単な n の値でためしてみると出てくる。標準的である。

全体的に難しいものはなく、70%程度はとりたい。