医学部専門予備校　クエスト　解答速報

東京医科大学　数学

試験日 2 月 4 日（水）

第1問

(1) $(\sin 0^\circ)^2 + (\sin 1^\circ)^2 + (\sin 2^\circ)^2 + \cdots + (\sin 180^\circ)^2$

$$= \sum_{k=1}^{180} (\sin k^\circ)^2 = \sum_{k=1}^{180} \frac{1-\cos(2k)^\circ}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{180} 1 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{180} \cos(2k)^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\times 180 - \frac{1}{2}\left\{\sum_{k=1}^{90} \cos(2k)^\circ + \sum_{k=91}^{180} \cos(2k)^\circ\right\}$$

$$= 90 - \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{90} \cos(2k)^\circ + \sum_{k=1}^{90} \cos\{2(k+90)\}^\circ\right]$$

$$= 90 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{90}\left\{\cos(2k)^\circ + \cos(2k+180)^\circ\right\}$$

$$= 90 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{90}\left\{\cos(2k)^\circ - \cos(2k)^\circ\right\} = \underline{90}$$

(2) $f(x) = 3\cos 2x + \sin^2 x - 2\cos x$

$$= 3(2\cos^2 x - 1) + (1 - \cos^2 x) - 2\cos x$$

$$= 5\cos^2 x - 2\cos x - 2$$

$$= 5\left(\cos x - \frac{1}{5}\right)^2 - \frac{11}{5} \quad (-1 \leqq \cos x \leqq 1)$$

$\cos x = \frac{1}{5}$ のとき $f(x) = \underline{-\frac{11}{5}}$（最小値）

$\cos x = -1$ のとき $f(x) = \underline{5}$（最大値）

(3) $a_n = a + d(n-1)$ とする。

$a_{140} = a + 139d = 1111$ より $a = 1111 - 139d$

$a_n = 1111 + d(n-140)$

$S_{100} - 2S_{101} + S_{102} = 5$

$\Leftrightarrow (S_{102} - S_{101}) - (S_{101} - S_{100}) = 5$

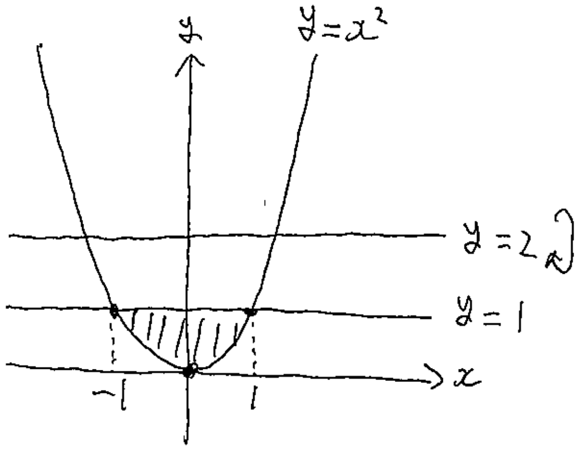
$\Leftrightarrow a_{102} - a_{101} = 5$ より、

$(1111 - 38d) - (1111 - 39d) = 5$

したがって、$d = \underline{5}$ より、$a_n = 5n + 411$

$a_n = 2026$ とすると、$n = \underline{323}$

(4)



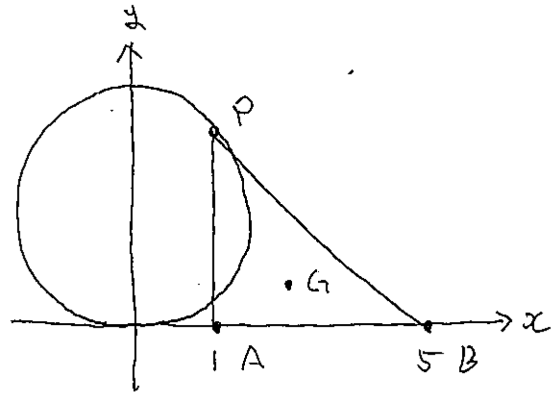
$$\frac{V}{2} = \int_0^1 \pi(2-x^2)^2 dx - \pi$$

$$= \pi \int_0^1 (x^4 - 4x^2 + 4)dx - \pi$$

$$= \frac{\pi}{5}[x^5]_0^1 - \frac{4}{3}\pi[x^3]_0^1 + 4\pi[x]_0^1 - \pi$$

$$= \frac{\pi}{5} - \frac{4}{3}\pi + 4\pi - \pi = \frac{28}{15}\pi$$ より $V = \underline{\frac{56}{15}\pi}$

第2問



(1) $P(p, q)$　$G(a, b)$ とする。

$$\begin{cases} a = \dfrac{1+5+p}{3} \\ b = \dfrac{0+0+q}{3} \end{cases} \text{より} \begin{cases} p = 3a-6 \\ q = 3b \end{cases}$$

$(p, q) \neq (0, 0)$ より $(a, b) \neq (2, 0)$

$A(1, 0)$　$B(5, 0)$

$C : x^2 + (y-3)^2 = 9$

$p^2 + (q-3)^2 = 9$ より、

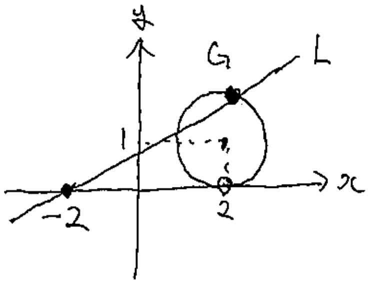
$(3a-6)^2 + (3b-3)^2 = 9$

$\Longleftrightarrow a^2 + b^2 - 4a - 2b + 4 = 0$

$\Longleftrightarrow (a-2)^2 + (b-1)^2 = 1$

以上より、C' は 点 $(2, 1)$ を中心とする半径 1 の円（点 $(2, 0)$ は除く）

(2) $\dfrac{3b}{a+2} = 3 \times \dfrac{b-0}{a-(-2)} = 3 \times$ {点 $(-2, 0)$ と $G(a, b)$ を通る直線の傾き}



$L : y = k(x+2)$　$(kx - y + 2k = 0)$

と点 $(2, 1)$ のキョリが 1 になるとき、

$\dfrac{|4k-1|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$ より $k = 0, \dfrac{8}{15}$

以上より、$0 < \dfrac{3b}{a+2} \leqq \dfrac{8}{5}$

(3) $\dfrac{(3b)^2 + (a+2)^2}{3b(a+2)} = \dfrac{3b}{a+2} + \dfrac{a+2}{3b} \geqq 2$（相加平均 ≧ 相乗平均）

$(-1 \leqq a \leqq 1$ より $a+2 > 0$, $0 < b \leqq 2$ より $3b > 0)$

等号は $\dfrac{3b}{a+2} = \dfrac{a+2}{3b}$ より、$\dfrac{3b}{a+2} = 1$ のとき成立。

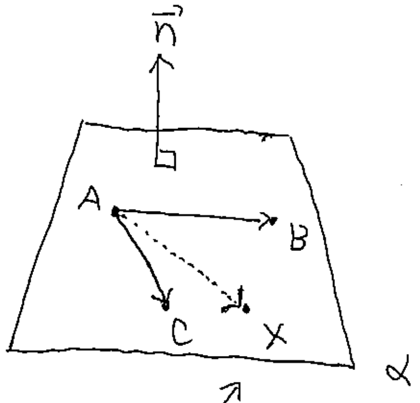
$L : y = \dfrac{1}{3}(x+2)$ と $C' : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ を連立すると、

$(3y-4)^2 + (y-1)^2 = 1 \Longleftrightarrow 10y^2 - 26y + 16 = 0$

$\Longleftrightarrow 5y^2 - 13y + 8 = 0 \Longleftrightarrow (5y-8)(y-1) = 0 \Longleftrightarrow y = \dfrac{8}{5}, 1$

第3問.

A$(7, 0, 0)$　B$\left(0, \frac{7}{2}, 0\right)$　C$\left(0, 0, \frac{7}{3}\right)$

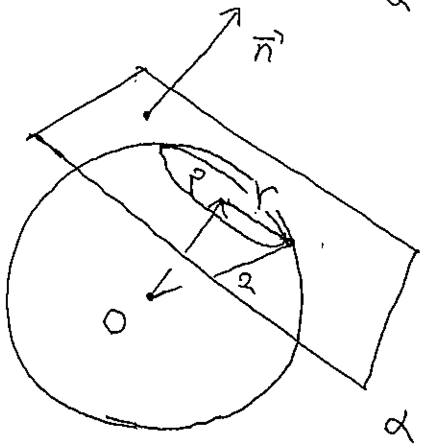


(1) $\overrightarrow{AB} = \left(-7, \frac{7}{2}, 0\right)$　$\overrightarrow{AC} = \left(-7, 0, \frac{7}{3}\right)$

$\vec{N} = \left(\frac{49}{6}, \frac{49}{3}, \frac{49}{2}\right)$ とすると、

$\vec{N} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ かつ $\vec{N} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ より $\vec{N} \perp \alpha$

$\vec{n} = \underline{(1, 2, 3)}$　$(|\vec{n}| = \sqrt{14})$



$S: x^2 + y^2 + z^2 = 4$

(2) α上の任意のX(x, y, z)について、

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AX} = 0$ より、

$1 \cdot (x - 7) + 2 \cdot (y - 0) + 3 \cdot (z - 0) = 0$

したがって、$\alpha : x + 2y + 3z - 7 = 0$

αとOのキョリ $= \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AO} = -7 < 0$

$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\vec{n}$ より、$\underline{P\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)}$

三平方の定理より、$r^2 = 2^2 - \left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ より $\underline{r = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

(3) D$(1, 1, 1)$　Dからαに下ろした垂線の足をHとすると、

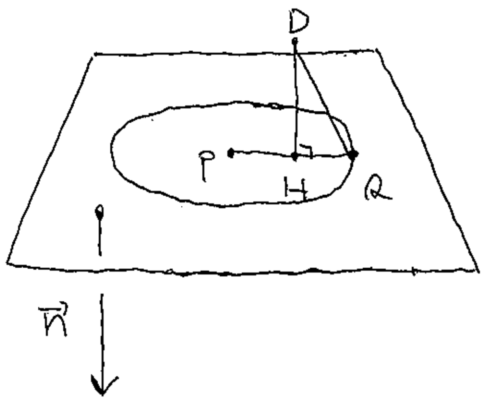
$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OD} + k\vec{n} = (k+1, 2k+1, 3k+1)$

Hはα上の点より、

$(k+1) + 2(2k+1) + 3(3k+1) - 7 = 0$ より $k = \frac{1}{14}$

H$\left(\frac{15}{14}, \frac{8}{7}, \frac{17}{14}\right)$　$\overrightarrow{PH} = \left(\frac{4}{7}, \frac{1}{7}, -\frac{2}{7}\right)$

$|\overrightarrow{PH}| = \frac{\sqrt{21}}{7} < r$



Qが左図の位置にあるとき、$|\overrightarrow{DQ}|$は最小となる。

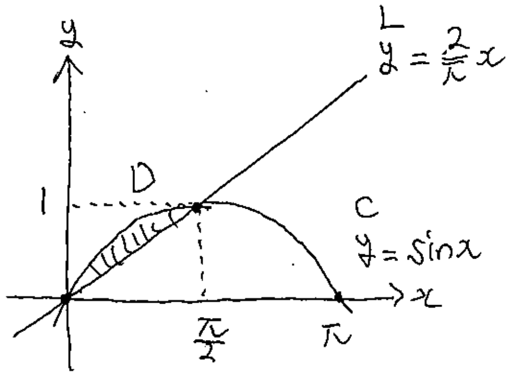
$|\overrightarrow{DH}| = \frac{1}{14}|\vec{n}| = \frac{\sqrt{14}}{14}$

$|\overrightarrow{QH}| = r - |\overrightarrow{PH}| = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{21}}{7}$

$|\overrightarrow{DQ}|^2 = |\overrightarrow{DH}|^2 + |\overrightarrow{QH}|^2 = \frac{1}{14} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{42}}{7} + \frac{3}{7}$

$= \underline{1 - \frac{\sqrt{42}}{7}}$

第4問



(1) CとLの共有点は $\underline{(0,0)\left(\frac{\pi}{2},1\right)}$

(2) $S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1$

$=\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{4}=\underline{1-\frac{\pi}{4}}$

(3) $V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi(\sin x)^2\,dx-\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\frac{\pi}{2}$

$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx-\frac{\pi^2}{6}$

$=\frac{\pi}{2}\left[x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{4}\left[\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi^2}{6}=\underline{\frac{\pi^2}{12}}$

(4) 上図より、

$\sin x\geqq\frac{2}{\pi}x\ \left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow\ e^{\sin x}\geqq e^{\frac{2}{\pi}x}\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ より、

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}\,dx>\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{2}{\pi}x}\,dx=\frac{\pi}{2}\left[e^{\frac{2}{\pi}x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}(e-1)$

「$\pi-x=t$」とおくと、

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{\sin x}\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}e^{\sin(\pi-t)}(-1)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin t}\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}\,dx$ であるから、

$\int_0^{\pi}e^{\sin x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{\sin x}\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}\,dx$

$>\pi(e-1)$