医学部専門予備校　クエスト　解答速報

聖マリアンナ医科大学　数学

試験日2月5日（木）

Ⅰ 複素数平面として考えると, $A(\sqrt{3}i)$, $B(-1)$, $C(1)$

この3点を原点のまわりに θ だけ回転したものが, それぞれ

A_1, B_1, C_1 だから,

A_1 : $\sqrt{3}i(\cos\theta + i\sin\theta) = -\sqrt{3}\sin\theta + i\cdot\sqrt{3}\cos\theta$

B_1 : $-1\cdot(\cos\theta + i\sin\theta) = -\cos\theta + i(-\sin\theta)$

C_1 : $1\cdot(\cos\theta + i\sin\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$

よって, $A_1(-\sqrt{3}\sin\theta, \sqrt{3}\cos\theta)$, $B_1(-\cos\theta, -\sin\theta)$,

$C_1(\cos\theta, \sin\theta)$ 　(ア〜エの答)

B_1 を y 軸方向に平行移動すると x 軸上にくるとき,

y 軸方向に $\sin\theta$ だけ平行移動すればよい. このとき, A_2, C_2 の

y 座標はそれぞれ, $\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta$, $2\sin\theta$ だから

$\triangle A_2B_2C_2$ の重心の y 座標, すなわち重心と x 軸との距離は

$$\frac{1}{3}(\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta + 2\sin\theta) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ より $\frac{\pi}{6} \leqq \theta + \frac{\pi}{6} \leqq \frac{2}{3}\pi$ だから. これが最大になるのは

$\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ すなわち $\theta = \frac{\pi}{3}$ のときで その距離は $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ (オ, カの答)

$\boxed{2}$ (1) 変量xのデータは50個（偶数個）あるから，

中央値は25番目と26番目の平均で，$Q_{2,x}=\dfrac{x_{25}+x_{26}}{2}$ （・田の答）

(2) 条件(I)，(II) より

$$1 \leqq x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{50}$$

(i) $y=x^2$ $(x \geqq 1)$ はxの増加関数だから，

$$Q_{2,y}=\frac{x_{25}^2+x_{26}^2}{2}$$

$x_{25}^2 > x_{25}$，$x_{26}^2 > x_{26}$ より　$Q_{2,y} > Q_{2,x}$　偽　2…(答)

(ii) $(Q_{2,x})^2=\left(\dfrac{x_{25}+x_{26}}{2}\right)^2$ より

$$Q_{2,y}-(Q_{2,x})^2=\frac{x_{25}^2+x_{26}^2}{2}-\left(\frac{x_{25}+x_{26}}{2}\right)^2=\left(\frac{x_{25}-x_{26}}{2}\right)^2>0$$

より　$(Q_{2,x})^2 < Q_{2,y}$　真　(1)…(答)

(iii) $\sqrt{Q_{2,x}}=\sqrt{\dfrac{x_{25}+x_{26}}{2}}$ であり，$z=\sqrt{x}$ もxの増加関数だから

$$Q_{2,z}=\frac{\sqrt{x_{25}}+\sqrt{x_{26}}}{2}$$

$$\left(\sqrt{Q_{2,x}}\right)^2-(Q_{2,z})^2=\frac{x_{25}+x_{26}}{2}-\left(\frac{\sqrt{x_{25}}+\sqrt{x_{26}}}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{x_{25}}-\sqrt{x_{26}}}{2}\right)^2>0$$

$\sqrt{Q_{2,x}}>0$，$\sqrt{Q_{2,z}}>0$ だから　$\sqrt{Q_{2,x}} > Q_{2,z}$　真　1…(答)

(iv) $\log Q_{2,x}=\log\dfrac{x_{25}+x_{26}}{2}$ であり，$w=\log x$ もxの増加関数

だから　$Q_{2,w}=\dfrac{\log x_{25}+\log x_{26}}{2}=\log\sqrt{x_{25}x_{26}}$

$x_{25}>0$，$x_{26}>0$ より相加・相乗平均の不等式を用いて

$$\frac{x_{25}+x_{26}}{2} > \sqrt{x_{25}x_{26}} \quad (\because x_{25} \neq x_{26})$$

が成り立つから，自然対数をとって　$\log Q_{2,x} > Q_{2,w}$　真　1…(答)

(3) 変量xの最大値はx_{50}, 最小値はx_1だから,

変量xのデータの範囲は　$x_{50}-x_1$　（$\boxed{ク}$の答）

$y=x^2\ (x \geqq 1)$ は x の増加関数だから,

$$\frac{\text{変量}y\text{のデータの範囲}}{\boxed{ク}}=\frac{x_{50}^2-x_1^2}{x_{50}-x_1}=x_{50}+x_1 \quad (\boxed{ケ}\text{の答})$$

$y_i'=\dfrac{y_i-y_1}{x_{50}+x_1}+x_1$ より, 変量yのデータが増加すれば,

変量y'のデータも増加するから, 中央値に関して

$$Q_{2,y'}=\frac{Q_{2,y}-y_1}{x_{50}+x_1}+x_1=\frac{\frac{x_{25}^2+x_{26}^2}{2}-x_1^2}{x_{50}+x_1}+x_1=\frac{x_{25}^2+x_{26}^2-2x_1^2}{2(x_{50}+x_1)}+x_1$$

$\boxed{コ}$ … $x_{25}^2+x_{26}^2-2x_1^2$

(4) $(Q_{2,x}-x_1)-(Q_{2,y'}-y_1')=(Q_{2,x}-x_1)-(Q_{2,y'}-x_1)$

$$=Q_{2,x}-Q_{2,y'}=\frac{x_{25}+x_{26}}{2}-\left(\frac{x_{25}^2+x_{26}^2-2x_1^2}{2(x_{50}+x_1)}+x_1\right)$$

$$=\frac{x_{50}(x_{25}+x_{26}-2x_1)+x_1(x_{25}+x_{26})-(x_{25}^2+x_{26}^2)}{2(x_{50}+x_1)}$$

$(x_{50}-x_{25})(x_{25}-x_1)=x_{50}(x_{25}-x_1)+x_1x_{25}-x_{25}^2$

より

$\{(Q_{2,x}-x_1)-(Q_{2,y'}-y_1')\}\cdot 2(\boxed{ケ})-(x_{50}-x_{25})(x_{25}-x_1)$

$=x_{50}(x_{26}-x_1)+x_1x_{26}-x_{26}^2=x_{50}(x_{26}-x_1)-x_{26}(x_{26}-x_1)$

$=(x_{50}-x_{26})(x_{26}-x_1)$

より　$\boxed{サ}$ … $x_{26}-x_1$

$x_1<x_{25}<x_{26}<x_{50}$ より $(x_{50}-x_{25})(x_{25}-x_1)>0$,

$(x_{50}-x_{26})(x_{26}-x_1)>0$ だから, $(Q_{2,x}-x_1)-(Q_{2,y'}-y_1')>0$

したがって $Q_{2,x}>Q_{2,y'}$, すなわち (xの中央値) > (y'の中央値) より, $\boxed{シ}$ … D

$\boxed{3}$ (1) 点Pが D上を動くとき，$s^2+t^2 \leqq 1$ … ①

$u=-\frac{2}{5}t+a$，$v=\frac{2}{5}s+b$ より $s=\frac{5}{2}(v-b)$，$t=\frac{5}{2}(a-u)$

①に代入して

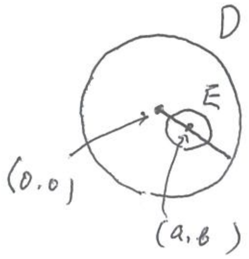
$$\left\{\frac{5}{2}(v-b)\right\}^2+\left\{\frac{5}{2}(a-u)\right\}^2 \leqq 1$$

$$(u-a)^2+(v-b)^2 \leqq \frac{4}{25}$$

よって，領域 E は $(x-a)^2+(y-b)^2 \leqq \frac{4}{25}$ …(答)

(2) 円Eが円Dの内部に含まれる

条件を考えて



(中心間距離) $\leqq$ |半径の差|

$$\sqrt{a^2+b^2} \leqq 1-\frac{2}{5}$$

$$a^2+b^2 \leqq \frac{9}{25} \quad \cdots \boxed{ス}$$

(3) QがPと一致するとき，$u=s$，$v=t$ が成り立つから，

$$s=-\frac{2}{5}t+a,\quad t=\frac{2}{5}s+b$$

第2式を第1式に代入して $s=-\frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}s+b\right)+a$

$\frac{29}{25}s=a-\frac{2}{5}b$ 　$\therefore s=\frac{25}{29}a-\frac{10}{29}b$

$$t=\frac{2}{5}\left(\frac{25}{29}a-\frac{10}{29}b\right)+b=\frac{10}{29}a-\frac{4}{29}b$$

不動点は $(s,t)=\left(\frac{25}{29}a-\frac{10}{29}b,\ \frac{10}{29}a-\frac{4}{29}b\right)$

… $\boxed{セ}$ ～ $\boxed{チ}$

(4) 不動点を (x,y) とおくと，(3)より $x=-\frac{2}{5}y+a$，$y=\frac{2}{5}x+b$

だから，$a=x+\frac{2}{5}y$，$b=y-\frac{2}{5}x$

(2)より $\left(x+\frac{2}{5}y\right)^2+\left(y-\frac{2}{5}x\right)^2 \leqq \frac{9}{25}$

$$\frac{29}{25}(x^2+y^2) \leqq \frac{9}{25} \qquad \therefore x^2+y^2 \leqq \frac{9}{29}$$

よって，(3) の不動点全体の集合は

$$\left\{ (x, y) \;\middle|\; x^2+y^2 \leqq \frac{9}{29} \right\} \quad \cdots \boxed{ツ}$$

$\boxed{4}$ (1) C_1 と C_2 の共有点は方程式 $x^a = a^x$ の正の解であり，$a>1$，$x>0$ より

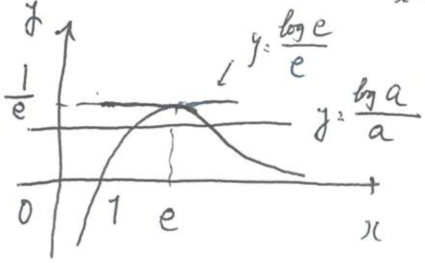
$$\log x^a = \log a^x \qquad \therefore a\log x = x\log a$$

よって $\dfrac{\log x}{x} = \dfrac{\log a}{a}$ の正の解である．

$f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ とおくと，$f'(x) = \dfrac{1-\log x}{x^2}$ より，$f(x)$ の増減は下のようになる．

x	0	$\cdots$	e	
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

また，$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = -\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ よりグラフは下図のようになる．



$y=f(x)$ と $y=f(a)$ の共有点の個数が求めるものだから

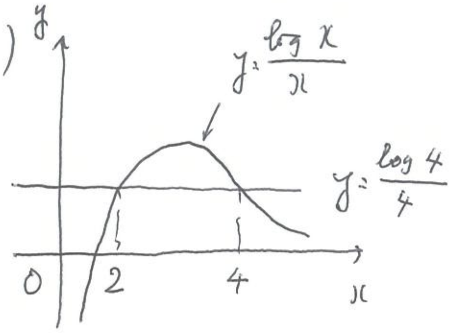
$$\left.\begin{array}{ll} 1<a<e,\ e<a \text{ のとき} & 2\text{個} \\ a=e \text{ のとき} & 1\text{個} \end{array}\right\} \cdots \text{(答)}$$

(2) $a=4$ のとき (1)と同じように考えて

$$x^4=4^x \quad \therefore \frac{\log x}{x}=\frac{\log 4}{4}=\frac{\log 2^2}{2^2}=\frac{\log 2}{2}$$

(1)のグラフより，この解は $1<x<e$ に1つ，$e<x$ にもう1つあるから，$x=2,\ 4$ …(答)

(3)



(2)より C_1, C_2 で囲まれる図形は $2 \leqq x \leqq 4$ に存在する．

$2 \leqq x \leqq 4$ において

$$\frac{\log x}{x} \geqq \frac{\log 4}{4} \quad \therefore x^4 \geqq 4^x$$

より，C_2 の方が C_1 より下側にある．求める面積は

$$\int_2^4 (x^4-4^x)\,dx=\left[\frac{x^5}{5}-\frac{4^x}{\log 4}\right]_2^4$$

$$=\frac{4^5-2^5}{5}-\frac{4^4-4^2}{\log 4}=\frac{2^{10}-2^5}{5}-\frac{2^8-16}{2\log 2}$$

$$=\frac{1024-32}{5}-\frac{256-16}{2\log 2}=\frac{992}{5}-\frac{240}{2\log 2}$$

$$=\frac{992\log 2-600}{5\log 2}$$

$\boxed{テ}$ $992\log 2-600$

(講評)

$\boxed{1}$ 複素数の回転

回転は複素数平面に直して考えればよい。

後半は問題に従って考えればよい。標準的である。

$\boxed{2}$ 中央値，箱ひげ図

データの個数が偶数か奇数かで中央値の計算が変わることに注意する。

(2) では x のデータが増加すれば，y, z, w のデータも増加するので，y, z, w の中央値を求めて，各不等式を考えればよい。

(3) では データの範囲＝(最大値)－(最小値) であることを用いて計算する。

(4) では，誘導の式が与えられているから，実際に計算して $\boxed{サ}$ を求めれば中央値の比較ができる。

やや計算が多いが，内容としては標準的である。

$\boxed{3}$ 領域，媒介変数表示，不動点

誘導に従えば難しくない。標準的である。

$\boxed{4}$ $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ に関する問題で，典型的な問題である。

全体的にやり易い問題がそろっているので，70％程度は必要と思われる。