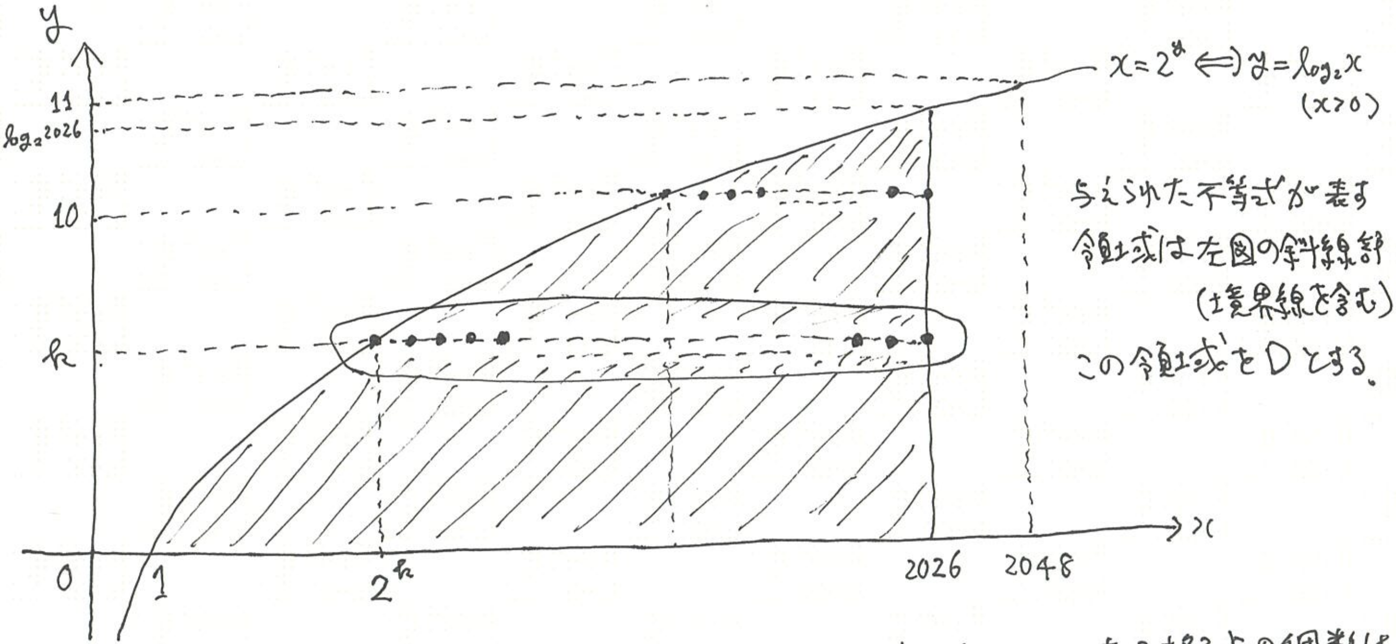
昭和医科大学（Ⅰ期）　数学　　　試験日2月6日（金）

$\boxed{1}$ (1) $2^{10}=1024<2026<2048=2^{11}$ に注意する。



与えられた不等式が表す領域は左図の斜線部（境界線を含む）この領域をDとする。

領域に含まれ、かつ、直線 $y=k$（kは0以上10以下の整数）の上にある格子点の個数は

$$2026-2^k+1=2027-2^k \text{ [個]}$$

よって、求める格子点の個数は、

$$\sum_{k=0}^{10}(2027-2^k)=2027\times 11-\frac{2^{11}-1}{2-1}=22297-2048+1=20250$$

∴ 20250個（答）

(2) $(\sqrt{2})^x=t$ とおくと、与式は

$$t^3+t^2-8t-8=0$$

$$(t+1)(t^2-8)=0$$

$$\therefore t=-1,\ \pm 2\sqrt{2}$$

$t=(\sqrt{2})^x>0$ であるから

$$t=2\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{2})^x=2\sqrt{2}\ \left(=(\sqrt{2})^3\right)$$

$\therefore x=3$（答）

1 (3) $[x]$で、実数xに対してxを超えない最大の整数を表すとする。

$1, 2, 3, \cdots, 2026$ という2026個の整数のうち、

5の倍数は、$\left[\frac{2026}{5}\right] = 405$ 個

$5^2 = 25$ の倍数は、$\left[\frac{2026}{25}\right] = 81$ 個

$5^3 = 125$ の倍数は、$\left[\frac{2026}{125}\right] = 16$ 個

$5^4 = 625$ の倍数は、$\left[\frac{2026}{625}\right] = 3$ 個

$5^k\ (k \geqq 5)$ の倍数は含まれない。

となるので、2026! を素因数分解したときに含まれる素因数5の個数は、

$$405 + 81 + 16 + 3 = 505 \text{個}$$

である。また、$\left[\frac{2026}{2}\right] = 1013$ であるから、2026! を素因数分解したときに含まれる素因数2の個数は素因数5の個数より多い。

よって、$2026! = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^{505} \cdot 7^c \cdot \cdots$ と素因数分解されたとすると、$a > 505$ より

$$2026! = 2^{a-505} \cdot 3^b \cdot 7^c \cdot \cdots \cdot 10^{505} = n \cdot 10^{505}$$ （nは5で割り切れない自然数）

と表されるので、2026! を10進法で表したときに末尾に並ぶ0の個数は

505個（答）

(4) このデータを $x = (x_i)_{1 \leqq i \leqq 2n+1}$ とすると、その平均 $\overline{x}$ および2乗平均 $\overline{x^2}$ は、

$$\overline{x} = \frac{1}{2n+1}\{(-n) + (-n+1) + \cdots + (-1) + 0 + 1 + \cdots + (n-1) + n\} = 0$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{2n+1}\{(-n)^2 + (-n+1)^2 + \cdots + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2\}$$

$$= \frac{1}{2n+1} \cdot 2 \cdot (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) = \frac{1}{2n+1} \cdot 2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)}{3}$$

よって、その分散 v_x は、

$$v_x = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 = \frac{n(n+1)}{3} - 0^2 = \frac{n(n+1)}{3}$$

ここで、$v_x = 30$ とすると、

$$\frac{n(n+1)}{3} = 30$$

$$n^2 + n - 90 = 0$$

$$(n-9)(n+10) = 0$$

$$n = 9, -10$$

よって、$n > 0$ より $n = 9$（答）

$\boxed{1}$ (5) $N=20^{26}$ とおくと，

$$\log_{10} N = \log_{10}(20^{26}) = 26\log_{10}20 = 26(1+\log_{10}2) = 26(1+0.301)$$

$$= 26\times1.301 = 33.826$$

ここで，$\log_{10}N - 33 = 0.826$ について，

$$\log_{10}6 = 0.778 < 0.826 < 0.845 = \log_{10}7$$

であるから，

$$\log_{10}6 + 33 < 33.826 < \log_{10}7 + 33$$

$$\log_{10}(6\cdot10^{33}) < \log_{10}N < \log_{10}(7\cdot10^{33})$$

よって，$6\cdot10^{33} < N < 7\cdot10^{33}$ となるので，

桁数：34桁（答）

最高位の数字：6（答）

$\boxed{2}$ (1) $t=\frac{\pi}{2}-x$ すなわち $x=\frac{\pi}{2}-t$ とおくと，$\frac{dx}{dt}=-1$ ，$\begin{array}{c|c} x & 0 \to \frac{\pi}{2} \\ \hline t & \frac{\pi}{2} \to 0 \end{array}$ より

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cdot\frac{dx}{dt}\cdot dt=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\cdot(-1)\cdot dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\,dt$$

よって，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=I_n$ (答)

(2) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\cos^{n-1}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)'\cos^{n-1}x\,dx$

$$=\left[\sin x\cdot\cos^{n-1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot(n-1)\cos^{n-2}x\cdot(-\sin x)\,dx$$

$$=0+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x\cdot\sin^2 x\,dx=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x\,(1-\cos^2 x)\,dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^{n-2}x-\cos^n x)\,dx=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x\,dx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$$

よって，$I_n=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$ すなわち $nI_n=(n-1)I_{n-2}$ が成立するので，

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}\quad(答)$$

(3) $n\geqq 2$ とするとき，(2)の結果より

$$I_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}I_{2n-1}\ ,\quad I_{2n}=\frac{2n-1}{2n}I_{2n-2}$$

が成り立つので，辺々掛けると

$$I_{2n+1}I_{2n}=\frac{2n-1}{2n+1}I_{2n-1}I_{2n-2}$$

よって，$n\geqq 2$ とするとき

$$(2n+1)I_{2n+1}I_{2n}=(2n-1)I_{2n-1}I_{2(n-1)}$$

が成り立ち，数列 $\{(2n+1)I_{2n+1}I_{2n}\}$ は n の値によらず一定値となるので，

$$(2n+1)I_{2n+1}I_{2n}=3\cdot I_3\cdot I_2$$

ここで，$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$ ，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx$

$=\left[\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$ ，$I_3=\frac{2}{3}\cdot I_1=\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}$ であるから，

$3\cdot I_3\cdot I_2=3\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ となるので，$(2n+1)I_{2n+1}I_{2n}=\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ I_{2n+1}I_{2n}=\frac{\pi}{2(2n+1)}$ (答)

(4) $\lim_{n\to\infty} nI_{2n+1}I_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\pi}{2(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\frac{\pi}{4}$ (答)

$\boxed{2}$ (5) (2)の結果より、十分大きい自然数 n に対して、

$$I_{2n}=\frac{2n-1}{2n}I_{2n-2}=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}I_{2n-4}=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-5}{2n-4}\cdot I_{2n-6}$$

$$=\cdots\cdots=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-5}{2n-4}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}I_2$$

$$=\frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots\cdots5\cdot3\cdot1}{2n(2n-2)(2n-4)\cdots\cdots6\cdot4\cdot2}\cdot2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

ここで、$(2n-1)!!\times(2n)!!=(2n-1)(2n-3)\cdots\cdot3\cdot1\cdot(2n)\cdot(2n-2)\cdots\cdots4\cdot2$

$=(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots\cdots4\cdot3\cdot2\cdot1=(2n)!$ であるから、

$(2n-1)!!=\dfrac{(2n)!}{(2n)!!}$ となるので、

$$I_{2n}=\frac{(2n)!}{\{(2n)!!\}^2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

これに、$(2n)!!=2^n\cdot n!$ を用いて、

$$I_{2n}=\frac{(2n)!}{(2^n\cdot n!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}\quad\text{——①}$$

ここで、$I_{2n+1}<I_{2n}<I_{2n-1}$ の各辺に $I_{2n}\,(>0)$ を掛けて、

$$I_{2n+1}I_{2n}<(I_{2n})^2<I_{2n}I_{2n-1}$$

このとき、(2)の結果より $I_{2n+1}=\dfrac{2n}{2n+1}I_{2n-1}$ であるから、$I_{2n-1}=\dfrac{2n+1}{2n}I_{2n+1}$ となり

$$I_{2n}I_{2n-1}=I_{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n}I_{2n+1}=\frac{2n+1}{2n}I_{2n+1}I_{2n}=\frac{2n+1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2(2n+1)}=\frac{\pi}{4n}$$

よって、$\dfrac{\pi}{2(2n+1)}<(I_{2n})^2<\dfrac{\pi}{4n}$

これに①を適用して、

$$\frac{\pi}{2(2n+1)}<\frac{\{(2n)!\}^2}{(2^n\cdot n!)^4}\cdot\frac{\pi^2}{4}<\frac{\pi}{4n}$$

各辺に $\dfrac{4n}{\pi^2}$ を掛けて、

$$\frac{2n}{(2n+1)\pi}<\frac{\{(2n)!\}^2n}{(2^n\cdot n!)^2}<\frac{1}{\pi}$$

ここで、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{(2n+1)\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(2+\frac{1}{n})\pi}=\frac{1}{\pi}$ であるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\{(2n)!\}^2n}{(2^n\cdot n!)^2}=\frac{1}{\pi}\quad(答)$$

$\boxed{3}$ (1) $f(x)=\frac{a^2}{27}x^3$ とおくと、$f'(x)=\frac{a^2}{9}x^2$ より、点$\left(s, \frac{a^2}{27}s^3\right)$ における C_1 の接線の方程式は、$y-\frac{a^2}{27}s^3=\frac{a^2}{9}s^2(x-s)$　∴ $y=\frac{a^2}{9}s^2x-\frac{2a^2}{27}s^3$ ―①

$g(x)=-\frac{1}{x}\ (x>0)$ とおくと、$g'(x)=\frac{1}{x^2}$ より、点$\left(t, -\frac{1}{t}\right)\ (t>0)$ における C_2 の接線の方程式は、$y-\left(-\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t^2}(x-t)$　∴ $y=\frac{1}{t^2}x-\frac{2}{t}$ ―②

①と②が一致するとき、共通接線となるので、

$$\begin{cases}\frac{a^2}{9}s^2=\frac{1}{t^2}\\ \frac{2a^2}{27}s^3=\frac{2}{t}\end{cases}\quad \text{すなわち}\quad \begin{cases}a^2s^2t^2=9 & \text{―③}\\ a^2s^3t=27 & \text{―④}\end{cases}$$

$s\neq 0$ は明らかより、④を③で辺々割って

$$\frac{a^2s^3t}{a^2s^2t^2}=\frac{27}{9}\quad \text{すなわち}\quad \frac{s}{t}=3\qquad \therefore\ s=3t \text{ ―⑤}$$

よって、③⑤より $9a^2t^4=9$　∴ $t^4=\frac{1}{a^2}$　よって、$t>0$ より $t=\frac{1}{\sqrt{a}}$ ―⑥

⑥を⑤に代入して $s=\frac{3}{\sqrt{a}}$，⑥を②に代入して $y=ax-2\sqrt{a}$

また、$-\frac{1}{t}=-\sqrt{a}$，$\frac{a^2}{27}s^3=\frac{a^2}{27}\cdot\frac{27}{a\sqrt{a}}=\sqrt{a}$ であるから、

$$l: y=ax-2\sqrt{a},\ P\left(\frac{3}{\sqrt{a}}, \sqrt{a}\right),\ Q\left(\frac{1}{\sqrt{a}}, -\sqrt{a}\right)\ (\text{答})$$

(2) $\overline{PQ}=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{3}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(-\sqrt{a}-\sqrt{a}\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{2}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(-2\sqrt{a}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{a}+4a}=2\sqrt{a+\frac{1}{a}}$

∴ $\overline{PQ}=2\sqrt{a+\frac{1}{a}}$ (答)

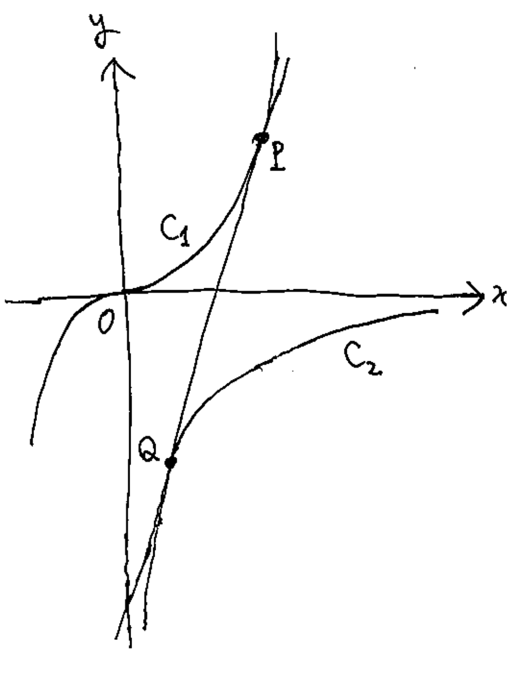
$a>0$，$\frac{1}{a}>0$ なので、相加平均・相乗平均の大小関係より、

$$\overline{PQ}=2\sqrt{a+\frac{1}{a}}\geqq 2\sqrt{2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}}=2\sqrt{2}$$

ここで、等号は $a=\frac{1}{a}$ かつ $a>0$ より $a=1$ のとき成立するので、

$d=2\sqrt{2}$ (答)

そのときの a の値は $a=1$ (答)



4　Aが赤玉を取り出す事象をA，Bが赤玉を取り出す事象をB，Cが赤玉を取り出す事象をC．全員が取り出した後、袋の中に赤玉が残っている事象をX とする。

(1) $P(A)=\frac{1}{5}$ (答)

(2) Aが白玉を取り出し、白玉1つを補充して袋の中が赤1個，白4個となってBが赤玉を取り出す場合であるから，

$$P(B)=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{25}$$ (答)

(3) Aが白玉を取り出し、白玉1つを補充して袋の中が赤1個，白4個となってBが白玉を取り出し、白玉1つを補充して袋の中が赤1個白4個となってCが赤玉を取り出す場合であるから，

$$P(C)=\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{16}{125}$$ (答)

(4) (3)のときにCが白玉を取り出す場合であるから，

$$P(X)=\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{64}{125}$$ (答)

(5) 求めるのは条件付き確率

$$P_{\overline{X}}(B)=\frac{P(B\cap\overline{X})}{P(\overline{X})}$$

である。

ここで，$P(\overline{X})=1-P(X)=1-\frac{64}{125}=\frac{61}{125}$

（注：$P(\overline{X})=P(A\cup B\cup C)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{A,B,Cは互いに排反}}}{=}P(A)+P(B)+P(C)=\frac{1}{5}+\frac{4}{25}+\frac{16}{125}=\frac{61}{125}$
としてもよい．）

また，$P(B\cap\overline{X})=P(B)=\frac{4}{25}$

よって，求める確率は，

$$P_{\overline{X}}(B)=\frac{\frac{4}{25}}{\frac{61}{125}}=\frac{20}{61}$$ (答)