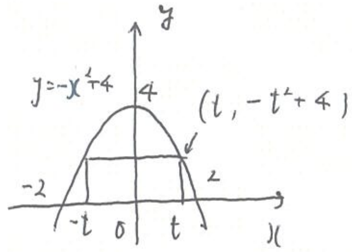
医学部専門予備校　クエスト　解答速報

埼玉医科大学（前期）　数学　　試験日 2 月 8 日（日）

1 問 1　第 1 象限にある長方形の

頂点を $(t, -t^2+4)$ とおくと，長方形の

面積 $S(t)$ は



$$S(t) = 2t(-t^2+4) = -2t^3+8t$$

$$S'(t) = -6t^2+8 = -2(3t^2-4)$$

$S(t)$ の増減は下のようになる.

t	0	…	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	…	2
$S'(t)$		+	0	−	
$S(t)$		↗		↘	

$S(t)$ は $t = \frac{2}{\sqrt{3}}$ で最大値 $S\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\left(-\frac{4}{3}+4\right) = \frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{8}{3} = \frac{32}{9}\sqrt{3}$ …（答）

をとる.

問 2　答えだけだからグラフで考える.

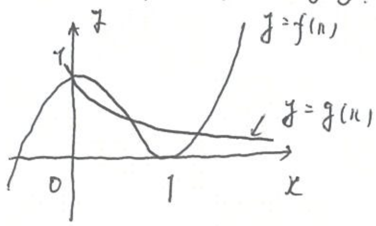
$f(x) = 2x^3-3x^2+1$，$g(x) = e^{-x}$ とおくと.

$f'(x) = 6x^2-6x = 6x(x-1)$ より増減は下のようになる.

また，$g(x)$ は減少かつ下に凸のグラフである.

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフは図のようになる.

x	…	0	…	1	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	1	↘	0	↗



よって，共有点の個数は 3 個 …（答）

（注）式でやるのであれば

（ア）$h(x) = f(x) - g(x)$ と x 軸の位置関係を調べる.

（イ）$f(x) = g(x)$ より $(2x^3-3x^2+1)e^{x} = 1$ として

左辺のグラフと $y=1$ の共有点を考える.　　などのやり方がある.

$\boxed{2}$ 問1　$x>1$ のとき

$$f(x)=\int_3^x \frac{2}{(1-t)(1+t)}\,dt=\int_3^x\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=\left[\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]_3^x=\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\log\frac{4}{2}$$

$1+x>0$，$1-x<0$ より

$$f(x)=\log\frac{1+x}{-1+x}-\log 2 \quad \cdots(答)$$

問2　$0\leqq x<1$ のとき

$$f(x)=\left[\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]_c^x=\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\log\left|\frac{1+c}{1-c}\right|$$

$0\leqq x<1$，$0<c<1$ より　$\dfrac{1+x}{1-x}>0$，$\dfrac{1+c}{1-c}>0$

$$f(x)=\log\frac{1+x}{1-x}-\log\frac{1+c}{1-c}$$

$$f(0)=-\log\frac{1+c}{1-c}$$

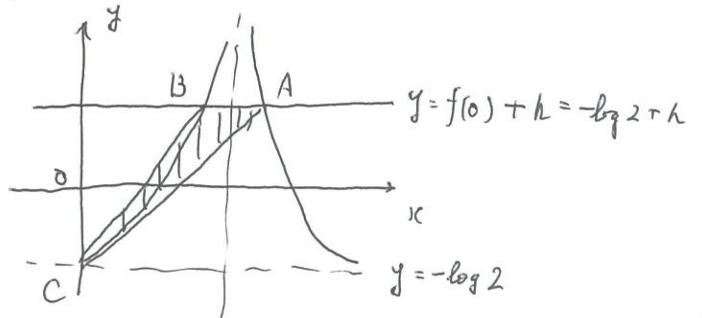
また，問1より　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\log\frac{\frac{1}{x}+1}{-\frac{1}{x}+1}-\log 2\right)=-\log 2$

$\displaystyle f(0)=\lim_{x\to+\infty}f(x)$ より　$\displaystyle -\log\frac{1+c}{1-c}=-\log 2$　$\displaystyle\therefore \frac{1+c}{1-c}=2$

したがって，$1+c=2(1-c)$　$\displaystyle\therefore c=\frac{1}{3}$　$\cdots$(答)

問3　$0\leqq x<1$ のとき $f'(x)=\dfrac{2}{1-x^2}>0$，$1<x$ のとき $f'(x)=\dfrac{2}{1-x^2}<0$

$\displaystyle\lim_{x\to1\pm0}f(x)=\infty$ より　$f(x)$ のグラフは下のようになる.



$x>1$ のとき　$f(x)=-\log 2+h$ を解いて

$$x=\frac{e^h+1}{e^h-1}\quad(\leftarrow Aのx座標)$$

$0\leqq x<1$ のとき　$f(x)=-\log 2+h$ を解いて

$$x=\frac{e^h-1}{e^h+1}\quad(\leftarrow Bのx座標)$$

$C(0,-\log 2)$ より

$$S(h)=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot h=\frac{1}{2}\left(\frac{e^h+1}{e^h-1}-\frac{e^h-1}{e^h+1}\right)\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\frac{(e^h+1)^2-(e^h-1)^2}{(e^h-1)(e^h+1)}\cdot h$$

$$=\frac{4e^h}{2(e^{2h}-1)}\cdot h=\frac{2e^h h}{e^{2h}-1}\quad\cdots(答)$$

$\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=1$ を用いて，$\displaystyle\lim_{h\to+0}S(h)=\lim_{h\to+0}\frac{2h}{e^{2h}-1}\cdot e^h=1\cdot e^0=1$　$\cdots$(答)

$\boxed{3}$ 問1　正弦定理より

$$\frac{\sqrt{6}}{\sin A}=\frac{2}{\sin 45^\circ}\qquad \therefore \sin A=\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$A=60^\circ, 120^\circ$ となるが $A=60^\circ$ のとき $C=180^\circ-(60^\circ+45^\circ)=75^\circ$ で

鈍角三角形にならないから不適.

したがって　$A=120^\circ$ …(答)

問2.　$C=180^\circ-(120^\circ+45^\circ)=15^\circ$

$$\sin C=\sin(60^\circ-45^\circ)=\sin 60^\circ\cos 45^\circ-\cos 60^\circ\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\ \cdots(答)$$

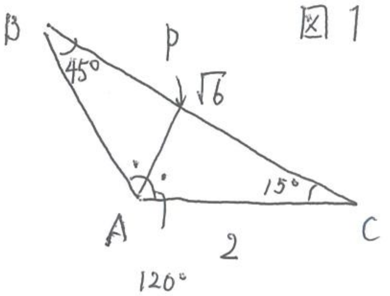


図1

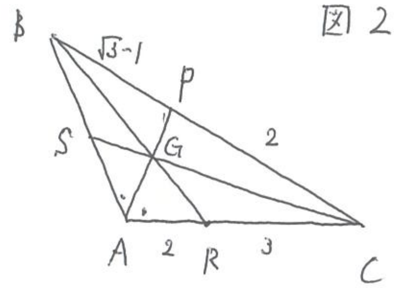


図2

問3　図1で正弦定理より　$\dfrac{AB}{\sin 15^\circ}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sin 120^\circ}$

$$AB=\sqrt{6}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}=\sqrt{3}-1$$

AP は $\angle A$ の二等分線だから　$BP:PC=AB:AC=\sqrt{3}-1:2$

よって　$BP=BC\times\dfrac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}-1)+2}=\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{6}\times(\sqrt{3}-1)^2\times\dfrac{1}{2}=2\sqrt{6}-3\sqrt{2}$ …(答)

問4　チェバの定理より

$$\frac{AS}{SB}\times\frac{BP}{PC}\times\frac{CR}{RA}=1$$

$$\frac{AS}{SB}\times\frac{\sqrt{3}-1}{2}\times\frac{3}{2}=1$$

$$\frac{AS}{SB}=\frac{4}{3(\sqrt{3}-1)}=\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{2}=\frac{2+2\sqrt{3}}{3}\ \cdots(答)$$

$\boxed{4}$ 1個玉を取り出したとき，1，0，−1が出る確率は順に，

$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$ である.

問1　$N=2$ のとき　$z=\cos\left(\frac{S}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{S}{3}\pi\right)=1$

となるのは　$\frac{S}{3}\pi=2k\pi$（kは整数）のときだから　$S=6k$

Sは6の倍数で　$-2\leqq S\leqq 2$ より　$S=0$

よって，0が2回のときと，1と−1が1回ずつのときで，求める確率は

$\left(\frac{2}{6}\right)^2+{}_2C_1\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{4+6}{36}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$　…（答）

問2　$N=3$ のとき　$z=\cos\left(\frac{S}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{S}{3}\pi\right)=-1$

となるのは，$\frac{S}{3}\pi=\pi+2k\pi$（kは整数）のときだから，$S=3(2k+1)$

Sは3の奇数倍で，$-3\leqq S\leqq 3$ より　$S=-3,\ 3$

よって　$S=-3$ のとき −1が3回，$S=3$ のとき 1が3回 だから，求める確率は

$\left(\frac{1}{6}\right)^3+\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{1+27}{216}=\frac{28}{216}=\frac{7}{54}$　…（答）

問3　$N=4$ のとき　zの実部が $-\frac{1}{2}$ だから　$\cos\left(\frac{S}{3}\pi\right)=-\frac{1}{2}$

となるのは，$\frac{S}{3}\pi=\pm\frac{2}{3}\pi+2k\pi$（$k$は整数）のときだから，$S=\pm 2+6k$

$-4\leqq S\leqq 4$ より　$S=-4,\ -2,\ 2,\ 4$

玉の出方を表にすると右のようになるから，

求める確率は

S ＼ 玉	1	0	−1
−4	0	0	4
−2	1	0	3
	0	2	2
2	3	0	1
	2	2	0
4	4	0	0

$\left(\frac{1}{6}\right)^4+{}_4C_1\frac{3}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^3+{}_4C_2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2+{}_4C_3\left(\frac{3}{6}\right)^3\frac{1}{6}$

$+{}_4C_2\left(\frac{3}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)^2+\left(\frac{3}{6}\right)^4$

$=\frac{1+12+24+108+216+81}{6^4}=\frac{442}{6^4}$

$=\frac{221}{3\cdot 6^3}=\frac{221}{648}$　…（答）

〈講評〉

$\boxed{1}$ 問1　3次関数の最大の文章題，教科書レベル

問2　記述式ならば関数を立てて微分にもちこむことになるが，答えだけだし，グラフの様子もある程度正確にわかるので，グラフから数えればよい
試験場では迷う可能性もある．標準

$\boxed{2}$ 定積分，極限

問1　積分を実行する．

問2　$f(0)=\lim_{x\to+\infty}f(x)$ を用いる．

問3　図を考え，実際にA，B，Cの座標を求める．
$\lim_{h\to+0}S(h)$ では $\lim_{t\to0}\dfrac{e^t-1}{t}=1$ を用いる．題意をつかむのが重要
計算主体の問題で，標準

$\boxed{3}$ 正弦定理，加法定理，二等分線の定理，チェバの定理

図を書いて，何が使えるかを考えればよい．標準

$\boxed{4}$ 反復試行の確率，極形式

極形式にまどわされずに，3種類の玉の出方をきちんと数え上げればよい．　標準

標準的な問題であるが，$\boxed{2}$ 問3や $\boxed{4}$ で題意を正確に速く読みとれるかで差がつくセットである．
時間は短いので，60％程度は必要と思われる．