慶應大学（医）　数学　　試験日 2 月 9 日（月）

[I] (1) $P\left(\frac{\pi}{4} \leqq Y \leqq \frac{3}{8}\pi\right) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{8}} \sin 2y\, dy = \left[-\frac{1}{2}\cos 2y\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{8}} = -\frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}$

$= \frac{\sqrt{2}}{4}$ (答) (あ)

$E(Y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \sin 2y = \left[y \cdot \left(-\frac{1}{2}\cos 2y\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\cos 2y\right) dy$

$= \frac{\pi}{4} + \left[\frac{1}{4}\sin 2y\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$ (答) (い)

$V(Y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(y - \frac{\pi}{4}\right)^2 \sin 2y\, dy = \left[\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\cos 2y\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\left(y - \frac{\pi}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\cos 2y\right) dy$

$= \frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi^2}{32} + \left[\left(y - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{2}\sin 2y\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \frac{1}{2}\sin 2y \cdot dy$

$= \frac{\pi^2}{16} + 0 - \left[-\frac{1}{4}\cos 2y\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$ (答) (う)

(2) $A \cap B = \phi$ となるための必要十分条件は，

$3(a+2) \leqq a^3 - 4a$ —① または $a^3 - 4a + 2(a-1)^2 + 1 \leqq 3(a+1)$ —②

となることである。

①のとき，$a^3 - 7a - 6 \geqq 0$ より $(a+1)(a+2)(a-3) \geqq 0$

$\therefore -2 \leqq a \leqq -1$ または $3 \leqq a$ —③

②のとき，$a^3 + 2a^2 - 11a \leqq 0$ より $a(a^2 + 2a - 11) \leqq 0$

$\therefore a \leqq -1 - 2\sqrt{3}$ または $0 \leqq a \leqq -1 + 2\sqrt{3}$ —④

以上より，$A \cap B = \phi$ となるための必要十分条件は，

$a \leqq -1-2\sqrt{3}$ または $-2 \leqq a \leqq -1$ または $0 \leqq a \leqq -1+2\sqrt{3}$ または $3 \leqq a$

となるので，$A \cap B \neq \phi$ となるための必要十分条件は，

$\underset{(え)}{-1-2\sqrt{3}} < a < \underset{(お)}{-2}$ または $\underset{(か)}{-1} < a < \underset{(き)}{0}$ または $\underset{(く)}{-1+2\sqrt{3}} < a < \underset{(け)}{3}$ (答)

[I](3) $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OR}=\left(1,\ b+1,\ \frac{1}{b}-1\right)$ より $c=b+1$, $d=\frac{1}{b}-1$ （答）(こ)(さ)

$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{OR}|=\sqrt{1+b^2+\frac{1}{b^2}}$, $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}=b-\frac{1}{b}$ より.

$$S(b)=\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2|\overrightarrow{OR}|^2-(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR})^2}=\sqrt{2\left(1+b^2+\frac{1}{b^2}\right)-\left(b-\frac{1}{b}\right)^2}$$

$$=\sqrt{b^2+\frac{1}{b^2}+4}\quad \text{（答）(し)}$$

$b^2>0$, $\frac{1}{b^2}>0$ なので、相加平均・相乗平均の大小関係より、

$$S(b)=\sqrt{b^2+\frac{1}{b^2}+4}\geqq\sqrt{2\sqrt{b^2\cdot\frac{1}{b^2}}+4}=\sqrt{6}$$ （等号は $b=\pm1$ のとき成立）

よって、$S(b)$ の最小値は $\sqrt{6}$ （答）(す)

[II](1) 赤玉4個、白玉2個の状態から操作Tで赤玉4個、白玉2個のままにとどまるのは、赤玉2個が取り出されない場合なので、その確率は $1-\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}=1-\frac{6}{15}=\frac{3}{5}$ であるから、

$$p_{n+1}=\frac{3}{5}p_n\quad \text{（答）(あ)}$$

赤玉4個、白玉2個の状態から操作Tで赤玉2個、白玉2個になる確率は $\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}=\frac{2}{5}$ であり、赤玉2個、白玉2個の状態から操作Tで赤玉2個、白玉2個のままにとどまるのは、赤玉2個が取り出されない場合なので、その確率は $1-\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ であるから、

$$q_{n+1}=\frac{2}{5}p_n+\frac{5}{6}q_n\quad \text{（答）(い)(う)}$$

ここで、$p_1=\frac{3}{5}$ より、$p_n=p_1\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}=\left(\frac{3}{5}\right)^n$ （答）(え)

よって、$q_{n+1}=\frac{5}{6}q_n+\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n$ となるので、両辺に $\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}$ を掛けて、

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}q_{n+1}=\frac{25}{18}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^n q_n+\frac{2}{3}$$

$r_n=\left(\frac{5}{3}\right)^n q_n$ とおくと、

$$r_{n+1}=\frac{25}{18}r_n+\frac{2}{3}$$

$$\left(\begin{aligned}\alpha&=\frac{25}{18}\alpha+\frac{2}{3}\\ -\frac{7}{18}\alpha&=\frac{2}{3}\\ \alpha&=-\frac{12}{7}\end{aligned}\right)$$

これを変形して、

$$r_{n+1}+\frac{12}{7}=\frac{25}{18}\left(r_n+\frac{12}{7}\right)$$

ここで、$r_1=\frac{5}{3}q_1=\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{3}$ より $r_1+\frac{12}{7}=\frac{2}{3}+\frac{12}{7}=\frac{50}{21}$ であるから

$$r_n+\frac{12}{7}=\left(r_1+\frac{12}{7}\right)\left(\frac{25}{18}\right)^{n-1}=\frac{50}{21}\cdot\left(\frac{25}{18}\right)^{n-1}=\frac{50}{21}\cdot\frac{18}{25}\left(\frac{25}{18}\right)^{n}=\frac{12}{7}\left(\frac{25}{18}\right)^{n}$$

よって　$r_n=\frac{12}{7}\left\{\left(\frac{25}{18}\right)^n-1\right\}$　すなわち　$\left(\frac{5}{3}\right)^n q_n=\frac{12}{7}\left\{\left(\frac{25}{18}\right)^n-1\right\}$　となるので

$$q_n=\frac{12}{7}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}$$　(答)　(お)(か)(き)

これより、操作Tをn回施し終えたときに初めて袋の中の赤玉が0個になる確率は、

$n=1$ のとき　0

$n\geqq 2$ のとき、赤玉2個、白玉2個の状態から操作Tで赤玉0個、白玉2個になる確率は、赤玉2個を取り出す場合より $\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{6}$ であるから、

$$q_{n-1}\times\frac{1}{6}=\frac{2}{7}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}$$

(これは、$n=1$ のとき 0 となるので成立する。

以上より、求める確率は　$\frac{2}{7}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}$　(答)　(く)

(2)　$E(X_n)=6\cdot p_n+3.5\cdot q_n=6\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n+\frac{7}{2}\cdot\frac{12}{7}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}=6\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n$　(答)　(け)

$$V(X_n)=E(X_n{}^2)-\{E(X_n)\}^2=6^2\cdot p_n+3.5^2\cdot q_n-\left\{6\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}^2$$

$$=36\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n+\frac{49}{4}\cdot\frac{12}{7}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}-36\cdot\left(\frac{25}{36}\right)^n$$

$$=15\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n+21\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n-36\cdot\left(\frac{25}{36}\right)^n$$

$$=3\left\{7\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n+5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n-12\cdot\left(\frac{25}{36}\right)^n\right\}$$　(答)　(こ)(さ)(し)(す)(せ)(そ)

(3) 求める期待値は、

$$\sum_{n=1}^{N}2^{N-n}\cdot\frac{2}{7}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}=\frac{2^N}{7}\sum_{n=1}^{N}\left\{\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}-\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{2^N}{7}\cdot\left\{\frac{1-\left(\frac{5}{12}\right)^N}{1-\frac{5}{12}}-\frac{1-\left(\frac{3}{10}\right)^N}{1-\frac{3}{10}}\right\}=\frac{2^N}{7}\cdot\left\{\frac{12}{7}-\frac{12}{7}\cdot\left(\frac{5}{12}\right)^N-\frac{10}{7}+\frac{10}{7}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^N\right\}$$

$$=\frac{2}{49}\cdot\left\{2^N-6\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^N+5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^N\right\}$$　(答)　(た)(ち)(つ)(て)(と)(な)

[Ⅲ] (1) $z^r = \cos\frac{2r\pi}{7} + i\sin\frac{2r\pi}{7} = 1$ より $\frac{2r\pi}{7} = 2m\pi$ (m：整数)

よって $r = 7m$ より，r の中で最小なものは $k = 7$ (答)(あ)

どんな自然数 l に対しても $(z^l)^7 = (z^7)^l = 1^l = 1$ より，z^l は 1 の 7 乗根である．

ここで，$\frac{z^7-1}{z-1} = 0$ より $z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$ ――① が成り立つ．

また，$z^7 = 1$ より $|z^7| = 1$ すなわち $|z|^7 = 1$ となるので $|z| = 1$ であるから，

$z\bar{z} = |z|^2 = 1$ より $\bar{z} = \frac{1}{z}$ となり $\frac{1}{z} = \bar{z} = \cos\frac{2\pi}{7} - i\sin\frac{2\pi}{7}$ となるから，

$$a = z + \frac{1}{z} = 2\cos\frac{2}{7}\pi \quad (答)(い)$$

このとき，$z^2 + \frac{1}{z^2} = \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 - 2 = a^2 - 2$ (答)(う)

$$z^3 + \frac{1}{z^3} = \left(z+\frac{1}{z}\right)^3 - 3\left(z+\frac{1}{z}\right) = a^3 - 3a \quad (答)(え)$$

さらに，① の両辺を z^3 で割って整理すると，

$$z^3+\frac{1}{z^3}+z^2+\frac{1}{z^2}+z+\frac{1}{z}+1=0$$

$$a^3-3a+a^2-2+a+1=0$$

$$\therefore \quad a^3+a^2-2a-1=0$$

これより，a を解にもつ 3 次方程式の 1 つとして，

$$x^3+x^2-2x-1=0 \quad (答)(お)(か)(き)$$

をとれる。ここで，$z^2 = \cos\frac{4\pi}{7} + i\sin\frac{4\pi}{7}$，$z^3 = \cos\frac{6\pi}{7} + i\sin\frac{6\pi}{7}$ も

それぞれ 1 の 7 乗根であるから，$z^2 + \frac{1}{z^2} = 2\cos\frac{4\pi}{7}$，$z^3 + \frac{1}{z^3} = 2\cos\frac{6\pi}{7}$ も

方程式 $x^3+x^2-2x-1=0$ を満たし，　$2\cos\frac{6\pi}{7} < 2\cos\frac{4\pi}{7} < 2\cos\frac{2\pi}{7}$ より

これら 3 数は互いに異なるので，この 3 次方程式の 3 解を与える。

よって，この方程式の a 以外の 2 つの解は

$$b = 2\cos\left(\frac{4}{7}\pi\right),\quad c = 2\cos\left(\frac{6}{7}\pi\right) \quad (答)(く)(け)$$

[Ⅲ] (2) $a=2\cos\frac{2\pi}{7}$ より $0<a<2$ である。

$f(x)=x^3+x^2-2x-1$ とおくと、$f'(x)=3x^2+2x-2$

x	$\cdots$	$\frac{-1-\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$1-\frac{-1+\sqrt{7}}{3}=\frac{4-\sqrt{7}}{3}=\frac{\sqrt{16}-\sqrt{7}}{3}>0$

より $\frac{-1+\sqrt{7}}{3}<1$ に注意すると、

$x\geqq 1$ で $f(x)$ は単調増加する。

ここで、$f(1)=1+1-2-1=-1<0$，$f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}+2-2\sqrt{2}-1=1>0$ であるから、

$1<a<\sqrt{2}$ であり、$\sqrt{m}<a<\sqrt{m+1}$ を満たす自然数 m は $m=1$ （答）(こ)

(3) $f\left(\sqrt{\frac{n}{10}}\right)=\frac{n}{10}\sqrt{\frac{n}{10}}+\frac{n}{10}-2\sqrt{\frac{n}{10}}-1=\frac{n\sqrt{n}+\sqrt{10}n-20\sqrt{n}-10\sqrt{10}}{10\sqrt{10}}$ より

$g(x)=x\sqrt{x}+\sqrt{10}x-20\sqrt{x}-10\sqrt{10}$ とおくと、

$$g(15)=15\sqrt{15}+15\sqrt{10}-20\sqrt{15}-10\sqrt{10}=5\sqrt{10}-5\sqrt{15}<0$$

$$g(16)=16\sqrt{16}+16\sqrt{10}-20\sqrt{16}-10\sqrt{10}=6\sqrt{10}-16=2(\sqrt{90}-\sqrt{64})>0$$

であるから、$f\left(\sqrt{\frac{15}{10}}\right)<0$，$f\left(\sqrt{\frac{16}{10}}\right)>0$ より $\sqrt{\frac{15}{10}}<a<\sqrt{\frac{16}{10}}$

よって、$n=15$ （答）(さ)

(4) $|b|=\left|2\cos\frac{4\pi}{7}\right|=-2\cos\frac{4\pi}{7}=2\cos\left(\pi-\frac{4\pi}{7}\right)=2\cos\frac{3\pi}{7}$

$|c|=\left|2\cos\frac{6\pi}{7}\right|=-2\cos\frac{6\pi}{7}=2\cos\left(\pi-\frac{6\pi}{7}\right)=2\cos\frac{\pi}{7}$

ここで、$\cos\frac{3\pi}{7}<\cos\frac{2\pi}{7}<\cos\frac{\pi}{7}$ より $|b|<a<|c|$ （答）(し)(す)(せ)

(5) $b=z^2+\frac{1}{z^2}=a^2-2$ より $|b|=-b=-(a^2-2)=2-a^2$

$c=z^3+\frac{1}{z^3}=a^3-3a$ より $|c|=-c=-(a^3-3a)=3a-a^3$

よって、$a+|b|-|c|=a+2-a^2-3a+a^3=a^3-a^2-2a+2$

$=a^2(a-1)-2(a-1)=(a-1)(a^2-2)=(a-1)(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})$

$=-(a-1)(a+\sqrt{2})(\sqrt{2}-a)<0$ （$\because$ $1<a<\sqrt{2}$ より）

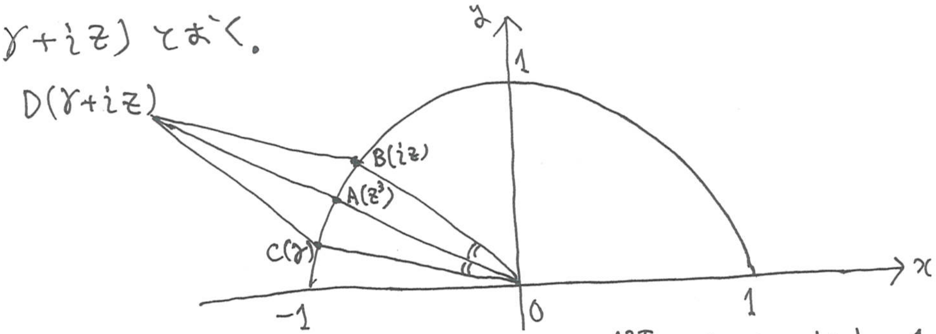
となるので、$a+|b|<|c|$ となり三角形の成立条件 $a+|b|>|c|$ を満たさない。

よって、$a,|b|,|c|$ を3辺の長さとする三角形は存在しない。

[III] (6) $z^3=\left(\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}\right)^3=\cos\frac{6\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7}$

$iz=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{7}\right)=\cos\frac{11\pi}{14}+i\sin\frac{11\pi}{14}$

$C(\gamma)$, $D(\gamma+iz)$ とおく。



$\arg(iz)=\frac{11\pi}{14}$, $\arg(z^3)=\frac{6\pi}{7}=\frac{12\pi}{14}$ より $\arg\gamma=\frac{13\pi}{14}$ であり、$|\gamma|=1$ より

$\gamma=\cos\frac{13\pi}{14}+i\sin\frac{13\pi}{14}$ である。よって $\angle BOA=\angle COA=\frac{\pi}{14}$ であり、

ひし形 OBDC の対角線 OD の長さは $2\cdot OB\cdot\cos\frac{\pi}{14}=2\cos\frac{\pi}{14}$ となる。

よって、O, A, D が一直線上にあることより

$$\gamma+iz=\frac{OD}{OA}z^3=2\cos\frac{\pi}{14}\cdot z^3 \qquad \therefore\ \gamma=2\cos\frac{\pi}{14}\cdot z^3-iz \quad \text{―①}$$

ここで、$\cos 4\theta=2\cos^2 2\theta-1=2(2\cos^2\theta-1)^2-1=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$ より、

$\theta=\frac{\pi}{14}$ とすると $8\cos^4\frac{\pi}{14}-8\cos^2\frac{\pi}{14}+1=\cos\frac{2\pi}{7}=\frac{a}{2}$ となり、

$t=\cos\frac{\pi}{14}$ とおくと $8t^4-8t^2+1=\frac{a}{2}$ より $16t^4-16t^2+2-a=0$

よって、$t^2=\dfrac{8\pm\sqrt{8^2-16(2-a)}}{16}=\dfrac{8\pm4\sqrt{a+2}}{16}=\dfrac{2\pm\sqrt{a+2}}{4}=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{a+2}}{4}$

$t=\cos\frac{\pi}{14}>\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ より $t^2>\frac{1}{2}$ に注意して $t^2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{a+2}}{4}$

$t>0$ であるから $t=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{a+2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{a+2}}}{2}$ $\qquad\therefore\ \cos\frac{\pi}{14}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{a+2}}}{2}$

$\therefore$ ① より $\gamma=\sqrt{2+\sqrt{a+2}}\cdot z^3-iz$ （答）(と)(た)

(7) $|z^d+w^d|=\left|\left(\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}\right)^d+\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^d\right|$

$=\left|\cos\frac{2d\pi}{7}+i\sin\frac{2d\pi}{7}+\cos\frac{d\pi}{3}+i\sin\frac{d\pi}{3}\right|$

$=\left|\cos\frac{2d\pi}{7}+\cos\frac{d\pi}{3}+i\left(\sin\frac{2d\pi}{7}+\sin\frac{d\pi}{3}\right)\right|$

$=\left|2\cos\dfrac{\frac{2d\pi}{7}+\frac{d\pi}{3}}{2}\cos\dfrac{\frac{2d\pi}{7}-\frac{d\pi}{3}}{2}+2i\sin\dfrac{\frac{2d\pi}{7}+\frac{d\pi}{3}}{2}\cos\dfrac{\frac{2d\pi}{7}-\frac{d\pi}{3}}{2}\right|$

$=\left|2\cos\frac{d\pi}{42}\left(\cos\frac{13d\pi}{42}+i\sin\frac{13d\pi}{42}\right)\right|=2\left|\cos\frac{d\pi}{42}\right|$

よって、$|z^d+w^d|=2\left|\cos\dfrac{d\pi}{42}\right|$ は、$\cos\dfrac{d\pi}{42}=\pm1$ のとき最大値 2（答）（ち）

このとき、$\dfrac{d\pi}{42}=k\pi$ （k：整数）より $d=42k$ と表されるので、

$1\leqq d\leqq 2026$ より $1\leqq 42k\leqq 2026$ 　$\therefore\ \dfrac{1}{42}\leqq k\leqq\dfrac{2026}{42}=48.23\cdots$

したがって、$1\leqq k\leqq 48$ となるので、d の個数は 48 個（答）（つ）

[Ⅳ]（1）$y=f(x)$ と x 軸の共有点の x 座標が満たす方程式は、

$f(x)=0$ すなわち $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{a}{x^2}=0$ より $\dfrac{x^2-ax+a}{x^2(x-1)}=0$

よって、$x^2-ax+a=0$ となり、x 軸と接するとき重解をもつので、

判別式を D とすると $D=a^2-4a=a(a-4)=0$ 　$\therefore\ a=0,4$

ここで、$a>0$ より $a=4$（答）（あ）

このとき、$x^2-4x+4=0$ は $x=2$ を重解にもつので、

接点の x 座標は $x=2$（答）（い）

（2）$f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{4}{x^2}$ より $f'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{8}{x^3}=\dfrac{-x^3+8(x-1)^2}{x^3(x-1)^2}$

$=\dfrac{-(x^3-8x^2+16x-8)}{x^3(x-1)^2}=\dfrac{-(x-2)(x^2-6x+4)}{x^3(x-1)^2}$

x	(1)	$\cdots$	2	$\cdots$	$3+\sqrt{5}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$

$f(x)$ は $x=3+\sqrt{5}$ で極大値をとる。（答）（う）

$s=3+\sqrt{5}$ とおくと $s^2-6s+4=0$ より $s^2=6s-4$ を満たすので、極大値は

$$f(s)=\frac{1}{s-1}-\frac{4}{s^2}=\frac{1}{s-1}-\frac{4}{6s-4}=\frac{1}{3+\sqrt{5}-1}-\frac{2}{3(3+\sqrt{5})-2}$$

$$=\frac{1}{2+\sqrt{5}}-\frac{2}{7+3\sqrt{5}}=\frac{2-\sqrt{5}}{4-5}-\frac{2(7-3\sqrt{5})}{49-45}=-(2-\sqrt{5})-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$$

$$=\frac{-11+5\sqrt{5}}{2}$$ （答）（え）

以下、$c=f(s)=\dfrac{1}{s-1}-\dfrac{4}{s^2}=\dfrac{-11+5\sqrt{5}}{2}$ とする。

方程式 $f(x)=C$ すなわち $f(x)=f(s)$ を考えると，

$$\frac{1}{x-1}-\frac{4}{x^2}=\frac{1}{s-1}-\frac{4}{s^2}$$

$$\frac{4}{s^2}-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{s-1}=0$$

$$\frac{4(x+s)(x-s)}{s^2x^2}-\frac{x-s}{(s-1)(x-1)}=0$$

$x>1$ の範囲では分母をはらっても同値であり

$$(x-s)\{s^2x^2-4(s-1)(x-1)(x+s)\}=0$$

$$(x-s)\{(s-2)^2x^2-4(s-1)^2x+4s(s-1)\}=0$$

ここで，$(s-2)^2=s^2-4s+4=6s-4-4s+4=2s$

$4(s-1)^2=4s^2-8s+4=4(6s-4)-8s+4=16s-12$

$4s(s-1)=4s^2-4s=4(6s-4)-4s=20s-16$

よって，$(x-s)\{sx^2-(8s-6)x+10s-8\}=0$

$$\begin{array}{r}
sx+s^2-8s+6 \\
x-s\,\overline{\big)\,sx^2-(8s-6)x+10s-8} \\
\underline{sx^2-s^2x} \\
(s^2-8s+6)x+10s-8 \\
\underline{(s^2-8s+6)x-s^3+8s^2-6s} \\
s^3-8s^2+16s-8
\end{array}$$

$s^2-8s+6=6s-4-8s+6=-2s+2$

$f'(s)=0$ より $s^3-8(s-1)^2=0$ より

$s^3-8s^2+16s-8=0$

$\therefore\ (x-s)^2(sx-2s+2)=0$

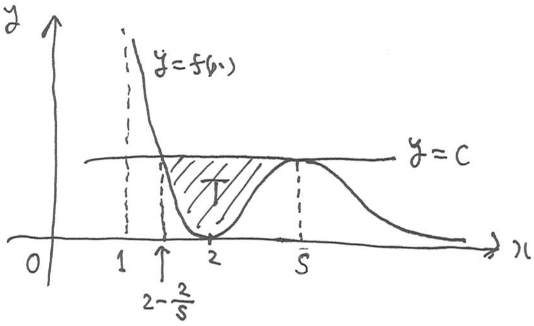
これより，方程式 $f(x)=C$ の解は $x=s$ および $x=2-\frac{2}{s}$ であり，

$$2-\frac{2}{s}=2-\frac{2}{3+\sqrt5}=2-\frac{2(3-\sqrt5)}{9-5}=2-\frac{3-\sqrt5}{2}=\frac{1+\sqrt5}{2}\ \text{(答)(お)}$$

$y=f(x)$ と $y=C$ で囲まれた部分の面積を T とすると，

$$T=\int_{2-\frac{2}{s}}^{s}\{C-f(x)\}dx$$

$$=\int_{\frac{1+\sqrt5}{2}}^{3+\sqrt5}\left(C-\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x^2}\right)dx$$



$$=\Big[Cx-\log|x-1|-\frac{4}{x}\Big]_{\frac{1+\sqrt5}{2}}^{3+\sqrt5}$$

$$=C\left(3+\sqrt5-\frac{1+\sqrt5}{2}\right)-\log(2+\sqrt5)+\log\frac{\sqrt5-1}{2}-\frac{4}{3+\sqrt5}+\frac{8}{1+\sqrt5}$$

$$=\frac{-11+5\sqrt5}{2}\cdot\frac{5+\sqrt5}{2}+\log\frac{\sqrt5-1}{2(2+\sqrt5)}-\frac{4(3-\sqrt5)}{9-5}+\frac{8(1-\sqrt5)}{1-5}$$

$$=\frac{-30+14\sqrt5}{4}+\log\frac{(\sqrt5-1)(\sqrt5-2)}{2(5-4)}-(3-\sqrt5)-2(1-\sqrt5)=\frac{-25+13\sqrt5}{2}+\log\frac{7-3\sqrt5}{2}$$

よって、 $T = \dfrac{-25+13\sqrt{5}}{2} + \log\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}$ （答）　（か）（き）（く）（け）（こ）

（3） $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{2a}{x^3} = \dfrac{2}{x^3}\left(a - \dfrac{x^3}{2(x-1)^2}\right)$

$p(x) = \dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$ とおくと、 $x > 1$ において対数微分して、

$$\log p(x) = 3\log x - 2\log(x-1) - \log 2$$

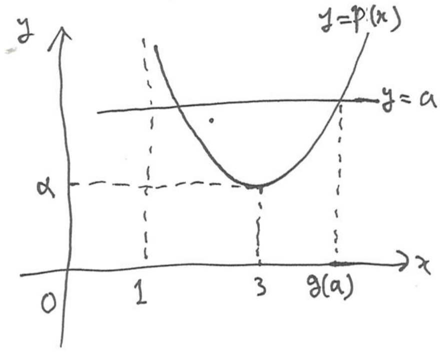
$$\frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{3}{x} - \frac{2}{x-1} = \frac{3(x-1)-2x}{x(x-1)} = \frac{x-3}{x(x-1)}$$

$$\therefore\ p'(x) = \frac{x-3}{x(x-1)}\cdot\frac{x^3}{2(x-1)^2} = \frac{x^2(x-3)}{2(x-1)^2}$$

x	(1)	$\cdots$	3	$\cdots$
$p'(x)$		$-$	0	$+$
$p(x)$		$\searrow$	$\frac{27}{8}$	$\nearrow$

よって、 $f(x)$ が極値をもつための必要十分条件は、 $f'(x)$ が符号変化することより、 $y = p(x)$ と $y = a$ の位置関係を考えて、 $a > \dfrac{27}{8}$ （答）（さ）

（4） $\alpha = \dfrac{27}{8}$ とおき、 $a > \dfrac{27}{8}$ とする。



極大値をとるのは $f'(x)$ が正から負に符号変化するところであるので、右図より $y = p(x)$ と $y = a$ の $x > 3$ にある交点となるところである。

$g(\alpha)$ が満たす方程式は $x^3 - 2a(x-1)^2 = 0$ であり、

$x = t+3$ とおくと $(t+3)^3 - 2a(t+2)^2 = 0$ より

$$t^3 - (2a-9)t^2 - (8a-27)t - (8a-27) = 0 \quad （解）（し）（す）（せ）$$

この t の方程式は $t = g(a) - 3$ を解にもつ。

そこで、 $u = g(a) - 3$ とおくと、 $8a - 27 = 8\left(a - \frac{27}{8}\right) = 8(a-\alpha)$ に注意して

$$u^3 - (2a-9)u^2 - 8(a-\alpha)u - 8(a-\alpha) = 0$$

両辺を $a - \alpha$ で割って

$$\frac{u^3}{a-\alpha} - (2a-9)\frac{u^2}{a-\alpha} - 8u - 8 = 0$$

$$(u-2a+9)\frac{u^2}{a-\alpha} = 8(u+1)$$

$$\frac{u^2}{a-\alpha} = \frac{8(u+1)}{u-2a+9} \quad すなわち \quad \left(\frac{g(a)-3}{\sqrt{a-\alpha}}\right)^2 = \frac{8(u+1)}{u-2a+9}$$

$$\therefore\ \frac{g(a)-3}{\sqrt{a-\alpha}} = \sqrt{\frac{8(u+1)}{u-2a+9}}$$

ここで、$a \to \alpha+0$ のとき $u = g(a)-3 \to +0$ に注意して、

$$\lim_{a\to\alpha+0}\frac{g(a)-3}{\sqrt{a-\alpha}} = \lim_{a\to\alpha+0}\sqrt{\frac{8(u+1)}{u-2a+9}} = \sqrt{\frac{8}{-2\alpha+9}} = \sqrt{\frac{8}{-2\times\frac{27}{8}+9}}$$

$$= \sqrt{\frac{32}{9(-3+4)}} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \quad (答)\ (そ)$$

方程式 $f(x)=f(g(a))$ について、

$$\frac{1}{x-1}-\frac{a}{x^2} = \frac{1}{g(a)-1}-\frac{a}{\{g(a)\}^2}$$

$$\frac{a}{\{g(a)\}^2}-\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{g(a)-1}=0$$

$$\frac{a\{x+g(a)\}\{x-g(a)\}}{\{g(a)\}^2x^2}-\frac{x-g(a)}{\{g(a)-1\}(x-1)}=0$$

$$\frac{\{x-g(a)\}\left(\{g(a)\}^2x^2-a\{g(a)-1\}(x-1)\{x+g(a)\}\right)}{\{g(a)\}^2\{g(a)-1\}x^2(x-1)}=0$$

$$\therefore\ \{x-g(a)\}\left\{(\{g(a)\}^2-ag(a)+a)x^2-a\{g(a)-1\}^2x+ag(a)\{g(a)-1\}\right\}=0$$

$x=g(a)$ で極値をとることから、この方程式が $g(a)$ を重解にもち、もう1つの解を $h(a)$ とすると、2次方程式

$$(\{g(a)\}^2-ag(a)+a)x^2-a\{g(a)-1\}^2x+ag(a)\{g(a)-1\}=0$$

が $g(a)$ と $h(a)$ を異なる2解にもつので、解と係数の関係より

$$g(a)+h(a)=\frac{a\{g(a)-1\}^2}{\{g(a)\}^2-ag(a)+a}$$

よって、

$$h(a)=\frac{a\{g(a)-1\}^2}{\{g(a)\}^2-ag(a)+a}-g(a)=\frac{a\{g(a)-1\}^2-\{g(a)\}^3+ag(a)\{g(a)-1\}}{\{g(a)\}^2-ag(a)+a}$$

$$=\frac{a\{g(a)-1\}^2-2a\{g(a)-1\}^2+ag(a)\{g(a)-1\}}{\{g(a)\}^2-ag(a)+a} \quad (\because \{g(a)\}^3=2a\{g(a)-1\}^2)$$

$$=\frac{-a\{g(a)-1\}^2+ag(a)\{g(a)-1\}}{\{g(a)\}^2-ag(a)+a}=\frac{a\{g(a)-1\}\{-g(a)+1+g(a)\}}{\{g(a)\}^2-ag(a)+a}$$

$$=\frac{a\{g(a)-1\}}{\{g(a)\}^2-ag(a)+a}=\frac{ag(a)\{g(a)-1\}}{\{g(a)\}^3-ag(a)\{g(a)-1\}}$$

$$=\frac{ag(a)\{g(a)-1\}}{2a\{g(a)-1\}^2-ag(a)\{g(a)-1\}}=\frac{g(a)}{2\{g(a)-1\}-g(a)}=\frac{g(a)}{g(a)-2}$$

よって．$h(a)-3=\dfrac{g(a)}{g(a)-2}-3=\dfrac{g(a)-3g(a)+6}{g(a)-2}=\dfrac{-2\{g(a)-3\}}{g(a)-2}$ となり，

$$\lim_{a\to\alpha+0}\frac{h(\alpha)-3}{\sqrt{a-\alpha}}=\lim_{a\to\alpha+0}\frac{-2}{g(a)-2}\cdot\frac{g(a)-3}{\sqrt{a-\alpha}}=\frac{-2}{3-2}\cdot\frac{4\sqrt{2}}{3}=-\frac{8\sqrt{2}}{3}$$ (答)(た)

さらに，

$$S(a)=\int_{h(a)}^{g(a)}\{f(g(a))-f(x)\}dx=\int_{h(a)}^{g(a)}\left\{f(g(a))-\frac{1}{x-1}+\frac{a}{x^2}\right\}dx$$

$$=\left[f(g(a))x-\log|x-1|-\frac{a}{x}\right]_{h(a)}^{g(a)}$$

$$=f(g(a))\{g(a)-h(a)\}-\log(g(a)-1)+\log(h(a)-1)-\frac{a}{g(a)}+\frac{a}{h(a)}$$

$$=\left(f(g(a))+\frac{a}{g(a)h(a)}\right)\{g(a)-h(a)\}-\log\frac{g(a)-1}{h(a)-1}$$

$$=\left\{\frac{1}{g(a)-1}-\frac{a}{\{g(a)\}^2}+\frac{a}{g(a)h(a)}\right\}\{g(a)-h(a)\}-\log\frac{g(a)-1}{h(a)-1}$$

$$=\left\{\frac{1}{g(a)-1}+\frac{a\{g(a)-h(a)\}}{\{g(a)\}^2h(a)}\right\}\{g(a)-h(a)\}-\log\frac{g(a)-1}{h(a)-1}$$

$$=\frac{1}{g(a)-1}\left\{g(a)-\frac{g(a)}{g(a)-2}\right\}+\frac{a}{\{g(a)\}^2\dfrac{g(a)}{g(a)-2}}\left\{g(a)-\frac{g(a)}{g(a)-2}\right\}^2$$
$$-\log\frac{g(a)-1}{\dfrac{g(a)}{g(a)-2}-1}$$

$$=\frac{g(a)}{g(a)-1}\cdot\frac{g(a)-3}{g(a)-2}+\frac{a\{g(a)-2\}}{\{g(a)\}^3}\cdot\frac{\{g(a)\}^2\{g(a)-3\}^2}{\{g(a)-2\}^2}-\log\frac{\{g(a)-1\}\{g(a)-2\}}{2}$$

$$=\frac{g(a)}{\{g(a)-1\}\{g(a)-2\}}\{g(a)-3\}+\frac{a\{g(a)\}^2}{2a\{g(a)-1\}^2\{g(a)-2\}}\cdot\{g(a)-3\}^2$$
$$-\log\frac{g(a)-1}{2}-\log\{g(a)-2\}$$

$$=\frac{g(a)}{\{g(a)-1\}\{g(a)-2\}}\cdot\{g(a)-3\}+\frac{\{g(a)\}^2}{2\{g(a)-1\}^2\{g(a)-2\}}\cdot\{g(a)-3\}^2$$
$$-\log\left(1+\frac{g(a)-3}{2}\right)-\log(1+g(a)-3)$$

ここで、$x>0$ において

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}<\log(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}$$

が成り立つことを示す。

$m(x)=\log(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)$ とおくて、

$$m'(x)=\frac{1}{1+x}-(1-x+x^2-x^3)=\frac{1-(1+x)(1-x+x^2-x^3)}{1+x}=\frac{1-(1-x^4)}{1+x}$$

$$=\frac{x^4}{1+x}$$ より　$x>0$ で $m'(x)>0$ となり $m(x)$ は単調増加するので、

$m(x)>m(0)=0$　$\therefore x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}<\log(1+x)$ が示された。

$n(x)=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\right)-\log(1+x)$ とおくて

$$n'(x)=(1-x+x^2-x^3+x^4)-\frac{1}{1+x}=\frac{(1-x+x^2-x^3+x^4)(1+x)-1}{1+x}$$

$$=\frac{1+x^5-1}{1+x}=\frac{x^5}{1+x}$$ より　$x>0$ で $n'(x)>0$ となり $n(x)$ は単調増加するので、

$n(x)>n(0)=0$　$\therefore \log(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}$ が示された。

以下、$g(a)=g$ と略記し、$g(a)-3=u$ とおくて、

$$S(a)=\frac{g}{(g-1)(g-2)}\cdot u+\frac{g^2}{2(g-1)^2(g-2)}\cdot u^2-\log\left(1+\frac{u}{2}\right)-\log(1+u)$$

このとき、上で示した不等式より

$$\frac{u}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{u}{2}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{u}{2}\right)^4<\log\left(1+\frac{u}{2}\right)<\frac{u}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{u}{2}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{u}{2}\right)^4+\frac{1}{5}\left(\frac{u}{2}\right)^5$$

$$u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}<\log(1+u)<u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\frac{u^5}{5}$$

2式の和をとって、

$$\frac{3}{2}u-\frac{5}{8}u^2+\frac{3}{8}u^3-\frac{17}{64}u^4<\log\left(1+\frac{u}{2}\right)+\log(1+u)<\frac{3}{2}u-\frac{5}{8}u^2+\frac{3}{8}u^3-\frac{17}{64}u^4+\frac{33}{160}u^5$$

よって、

$$\frac{g}{(g-1)(g-2)}u+\frac{g^2}{2(g-1)^2(g-2)}u^2-\frac{3}{2}u+\frac{5}{8}u^2-\frac{3}{8}u^3+\frac{17}{64}u^4-\frac{33}{160}u^5<S(a)$$

$$<\frac{g}{(g-1)(g-2)}u+\frac{g^2}{2(g-1)^2(g-2)}u^2-\frac{3}{2}u+\frac{5}{8}u^2-\frac{3}{8}u^3+\frac{17}{64}u^4$$

が成立する。

このとき、

$$\frac{g}{(g-1)(g-2)}u+\frac{g^2}{2(g-1)^2(g-2)}u^2-\frac{3}{2}u+\frac{5}{8}u^2-\frac{3}{8}u^3+\frac{17}{64}u^4$$

$$=\frac{2g-3(g-1)(g-2)}{2(g-1)(g-2)}u+\frac{g^2}{2(g-1)^2(g-2)}u^2+\frac{5}{8}u^2-\frac{3}{8}u^3+\frac{17}{64}u^4$$

$$=\frac{-3g^2+11g-6}{2(g-1)(g-2)}u+\frac{g^2}{2(g-1)^2(g-2)}u^2+\frac{5}{8}u^2-\frac{3}{8}u^3+\frac{17}{64}u^4$$

$$=\frac{(-3g+2)(g-3)}{2(g-1)(g-2)}u+\frac{g^2}{2(g-1)^2(g-2)}u^2+\frac{5}{8}u^2-\frac{3}{8}u^3+\frac{17}{64}u^4$$

$$=\frac{-3g+2}{2(g-1)(g-2)}u^2+\frac{g^2}{2(g-1)^2(g-2)}u^2+\frac{5}{8}u^2-\frac{3}{8}u^3+\frac{17}{64}u^4$$

$$=\frac{4(-3g+2)(g-1)+4g^2+5(g-1)^2(g-2)}{8(g-1)^2(g-2)}u^2-\frac{3}{8}u^3+\frac{17}{64}u^4$$

$$=\frac{5g^3-28g^2+45g-18}{8(g-1)^2(g-2)}u^2-\frac{3}{8}u^3+\frac{17}{64}u^4$$

$$=\frac{(5g^2-13g+6)(g-3)}{8(g-1)^2(g-2)}u^2-\frac{3}{8}u^3+\frac{17}{64}u^4$$

$$=\frac{5g^2-13g+6}{8(g-1)^2(g-2)}u^3-\frac{3}{8}u^3+\frac{17}{64}u^4$$

$$=\frac{(5g-3)(g-2)-3(g-1)^2(g-2)}{8(g-1)^2(g-2)}u^3+\frac{17}{64}u^4$$

$$=\frac{5g-3-3(g^2-2g+1)}{8(g-1)^2}u^3+\frac{17}{64}u^4=\frac{-3g^2+11g-6}{8(g-1)^2}u^3+\frac{17}{64}u^4$$

$$=\frac{(-3g+2)(g-3)}{8(g-1)^2}u^3+\frac{17}{64}u^4=\frac{-3g+2}{8(g-1)^2}u^4+\frac{17}{64}u^4=\left\{\frac{-3g+2}{8(g-1)^2}+\frac{17}{64}\right\}u^4$$

と変形されるので

$$\left\{\frac{-3g+2}{8(g-1)^2}+\frac{17}{64}\right\}u^4-\frac{33}{160}u^5<S(a)<\left\{\frac{-3g+2}{8(g-1)^2}+\frac{17}{64}\right\}u^4$$

よって、
$$\left\{\frac{-3g(a)+2}{8\{g(a)-1\}^2}+\frac{17}{64}\right\}\cdot\left(\frac{g(a)-3}{\sqrt{a-\alpha}}\right)^4-\frac{33}{160}\cdot\left(\frac{g(a)-3}{\sqrt{a-\alpha}}\right)^4\cdot\{g(a)-3\}<\frac{S(a)}{(a-\alpha)^2}$$

$$<\left\{\frac{-3g(a)+2}{8\{g(a)-1\}^2}+\frac{17}{64}\right\}\cdot\left(\frac{g(a)-3}{\sqrt{a-\alpha}}\right)^4$$

このとき

$$\lim_{a\to\alpha+0}\left\{\frac{-3g(a)+2}{8\{g(a)-1\}^2}+\frac{17}{64}\right\}\cdot\left(\frac{g(a)-3}{\sqrt{a-\alpha}}\right)^4=\left\{\frac{-9+2}{8(3-1)^2}+\frac{17}{64}\right\}\cdot\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^4$$

$$=\left(\frac{-7}{32}+\frac{17}{64}\right)\cdot\frac{2^{10}}{81}=\frac{3}{64}\cdot\frac{2^{10}}{81}=\frac{16}{27}$$

$$\lim_{a\to\alpha+0}\left\{\frac{-3g(a)+2}{8\{g(a)-1\}^2}+\frac{17}{64}\right\}\cdot\left(\frac{g(a)-3}{\sqrt{a-\alpha}}\right)^4-\frac{33}{160}\left(\frac{g(a)-3}{\sqrt{a-\alpha}}\right)^4\cdot\{g(a)-3\}=\frac{16}{27}$$

となるので、はさみうちの原理により

$$\lim_{a\to\alpha+0}\frac{S(a)}{(a-\alpha)^2}=\frac{16}{27}$$ （答）（ち）