日本大学（医）前期二次試験　数学　　試験日 2 月 11 日（水）

[1] (1) $\log 2 = \alpha$ とおくと　$e^{\alpha} = 2$ である.

$$\int_0^{\log 2} e^{-2x}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\alpha} = -\frac{1}{2}e^{-2\alpha} + \frac{1}{2}e^0 = -\frac{1}{2}\frac{1}{(e^{\alpha})^2} + \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{8} + \frac{4}{8} = \frac{3}{8} \cdots (答)$$

(2) $$\int_1^e x\log x\,dx = \int_1^e \left(\frac{1}{2}x^2\right)'\log x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2\cdot(\log x)'dx$$

$$= \frac{1}{2}e^2\log e - 0 - \int_1^e \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}e^2 - \int_1^e \frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}e^2 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2+1}{4} \cdots (答)$$

(3) $$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x+1}{x^2+1}dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{x^2+1}dx + \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}dx$$

ここで, $$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{x^2+1}dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx = \left[\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\log 4 - \frac{1}{2}\log 1$$

$$= \frac{1}{2}\log 2^2 = \log 2$$

$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}dx$ について, $x = \tan\theta$ とおくと, $dx = \dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$,

x	$0 \to \sqrt{3}$
θ	$0 \to \frac{\pi}{3}$

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}$$

よって $$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x+1}{x^2+1}dx = \log 2 + \frac{\pi}{3} \cdots (答)$$

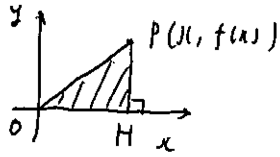
(4) $$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^2 x\cos 2x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{1-\cos 2x}{2}\cdot\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}} \left(\cos 2x - (\cos 2x)^2\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}} \left(\cos 2x - \frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{x}{2} - \frac{1}{8}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{8}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{\pi}{32} - \frac{1}{16} \cdots (答)$$

[2]　(1)　$x>0$，$f(x)=e^{-(\log x)^2}>0$ だから

$$S=\frac{1}{2}xf(x)=\frac{1}{2}xe^{-(\log x)^2}$$



$$S'=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot e^{-(\log x)^2}+\frac{1}{2}xe^{-(\log x)^2}\{-(\log x)^2\}'$$

$$=\frac{1}{2}e^{-(\log x)^2}+\frac{1}{2}xe^{-(\log x)^2}\left\{-2(\log x)\cdot\frac{1}{x}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}e^{-(\log x)^2}+\frac{1}{2}xe^{-(\log x)^2}\left(-\frac{2\log x}{x}\right)=\frac{1}{2}e^{-(\log x)^2}(1-2\log x)$$

$S'=0$ とすると　$\log x=\frac{1}{2}$　$\therefore\ x=e^{\frac{1}{2}}$

S の増減は下のようになる．

x	0	$\cdots$	$e^{\frac{1}{2}}$	$\cdots$
S'		+	0	−
S		↗		↘

S は $x=e^{\frac{1}{2}}$ のとき最大となり，S の最大値は，$\log e^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$ より

$$\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}e^{-(\frac{1}{2})^2}=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}}\quad\cdots(答)$$

(2)　$f(x)=e^{-(\log x)^2}$ より

$$f'(x)=e^{-(\log x)^2}\{-(\log x)^2\}'=-2\cdot\frac{\log x}{x}e^{-(\log x)^2}$$

$$f''(x)=-2\left(\frac{\log x}{x}\right)'e^{-(\log x)^2}-2\cdot\frac{\log x}{x}\left\{e^{-(\log x)^2}\right\}'$$

$$=-2\cdot\frac{1-\log x}{x^2}e^{-(\log x)^2}-2\cdot\frac{\log x}{x}e^{-(\log x)^2}\left(-2\cdot\frac{\log x}{x}\right)$$

$$=\frac{2}{x^2}e^{-(\log x)^2}\left\{-1+\log x+2(\log x)^2\right\}$$

$$=\frac{2}{x^2}e^{-(\log x)^2}(2\log x-1)(\log x+1)$$

$f''(x)=0$ とすると，$\log x=-1,\ \frac{1}{2}$　$\therefore\ x=e^{-1},\ e^{\frac{1}{2}}$

$f(x)$ の凹凸は下のようになる．

x	0	$\cdots$	e^{-1}	$\cdots$	$e^{\frac{1}{2}}$	$\cdots$
$f''(x)$		+	0	−	0	+
$f(x)$		∪		∩		∪

よって，C の変曲点の座標は

$$(e^{-1},\ e^{-1}),\ (e^{\frac{1}{2}},\ e^{-\frac{1}{4}})\quad\cdots(答)$$

[3] (1) $\angle C$ の二等分線と AB の交点を D とすると，（図1参照）

$AD : DB = CA : CB = 3 : 5$

よって $AD = AB \times \dfrac{3}{3+5} = 4 \times \dfrac{3}{8} = \dfrac{3}{2}$

$\triangle CAD$ において

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{AD}{CA} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2} \quad \cdots (答)$$

図1

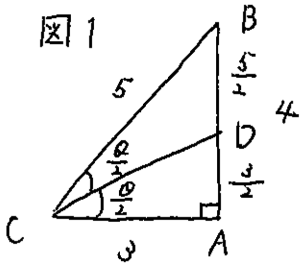
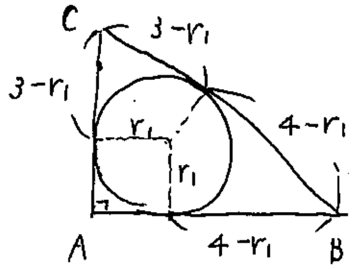


図2



(2) 図2において

$(3-r_1)+(4-r_1)=5 \qquad \therefore r_1 = 1$

円 C_n の中心を C_n，C_n から辺 CA に下ろした垂線の足を H_n，

C_{n+1} から C_nH_n に下ろした垂線の足を K_n とおくと，（図3参照）

$$\angle C_nC_{n+1}K_n = \frac{\theta}{2}, \quad C_nK_n = C_nH_n - C_{n+1}H_{n+1} = r_n - r_{n+1}$$

2円 C_n，C_{n+1} は外接しているから，$C_nC_{n+1} = r_n + r_{n+1}$

よって，$\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{C_nK_n}{C_nC_{n+1}} = \dfrac{r_n - r_{n+1}}{r_n + r_{n+1}}$

図4より，$\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ だから

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{r_n - r_{n+1}}{r_n + r_{n+1}}$$

$$r_n + r_{n+1} = \sqrt{5}\,(r_n - r_{n+1})$$

$$(\sqrt{5}+1)\,r_{n+1} = (\sqrt{5}-1)\,r_n \qquad \therefore r_{n+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}r_n = \frac{6-2\sqrt{5}}{4}r_n = \frac{3-\sqrt{5}}{2}r_n$$

$\{r_n\}$ は初項 $r_1 = 1$，公比 $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ の等比数列だから，一般項は

$$r_n = r_1\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \qquad \therefore r_n = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \quad \cdots (答)$$

図 3

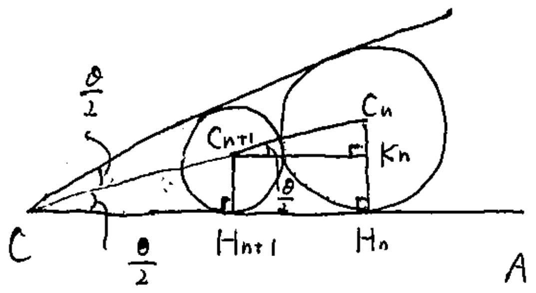
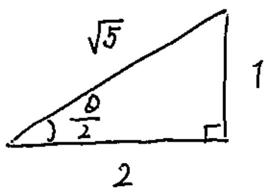


図 4



(3)　$S_n = \pi r_n^2 = \pi\left\{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right\}^2 = \pi\left\{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right\}^{n-1}$

$= \pi\left(\frac{14-6\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} = \pi\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$

$0 < \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 < 1$ より $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ は収束して，その和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\pi r_1^2}{1-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}} = \frac{2\pi}{2-(7-3\sqrt{5})} = \frac{2\pi}{3\sqrt{5}-5}$$

$$= \frac{2\pi(3\sqrt{5}+5)}{(3\sqrt{5}-5)(3\sqrt{5}+5)} = \frac{2\pi(3\sqrt{5}+5)}{45-25} = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\pi \quad \cdots \text{(答)}$$

（講評）

［1］どれも基本的な数Ⅲの定積分で落とせない。

［2］$f(x)>0$ より点 P は第 1 象限の点だから，

S は簡単に作れ，あとは微分するだけになる。

(2) も $f''(x)$ を作り，符号変化をみればよい。

標準的な問題である。

［3］円列を考える無限等比級数の問題で，

よくある問題である。方針にとまどうことはない

標準レベルの問題である。

全体的に基本～標準レベルの問題で，完答を

目指すセットである。