医学部専門予備校　クエスト　解答速報

東京慈恵医科大学　数学

試験日 2 月 11 日（水）

1. 袋Aから番号 a の玉、袋Bから番号 b の玉が取り出される場合を $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と書くとする。

袋A, Bともに3個の玉が入っている状態を X，袋A, Bともに2個の玉が入っている状態を Y，袋A, Bともに1個の玉が入っている状態を Z とする。

1回の操作で X → Y と推移するのは $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ という取り出し方のときであるから、その確率は $\dfrac{4}{3^2} = \dfrac{4}{9}$ である。

1回の操作で X → X と推移するのは、X → Y と推移する場合の余事象であるから、その確率は $1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9}$ である。

状態 Y のときの袋A, Bの中の玉の数字の状況は、

(i) A $(2\ 3)$ B $(1\ 3)$ または (ii) A $(1\ 2)$ B $(1\ 3)$ または (iii) A $(1\ 3)$ B $(2\ 3)$ または (iv) A $(1\ 3)$ B $(1\ 2)$

それぞれの場合について Y → Z と推移するのは、それぞれ

(i) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$　(ii) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$　(iii) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$　(iv) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

という取り出し方のときであるから、その確率は、状態 Y の袋A, Bの中の状況によらず、$\dfrac{2}{2^2} = \dfrac{1}{2}$ である。

1回の操作で Y → Y と推移する確率は、Y → Z と推移する場合の余事象であるから、その確率は $1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ である。

(ア) 2回目の操作を終えたとき、袋の中に玉がちょうど1個ずつ残っているのは、$X \xrightarrow{\frac{4}{9}} Y \xrightarrow{\frac{1}{2}} Z$ と推移する場合であるから、その確率は $\dfrac{4}{9} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{9}$ （答）

(イ) 3回目の操作を終えたとき、袋の中に玉がちょうど2個ずつ残っているのは、

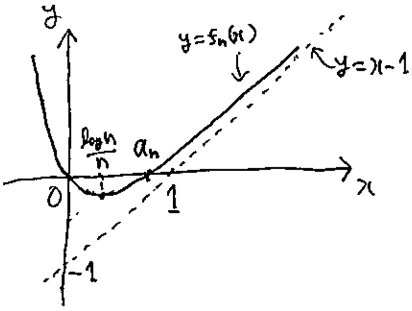
$X \xrightarrow{\frac{5}{9}} X \xrightarrow{\frac{5}{9}} X \xrightarrow{\frac{4}{9}} Y$ または $X \xrightarrow{\frac{5}{9}} X \xrightarrow{\frac{4}{9}} Y \xrightarrow{\frac{1}{2}} Y$ または $X \xrightarrow{\frac{4}{9}} Y \xrightarrow{\frac{1}{2}} Y \xrightarrow{\frac{1}{2}} Y$

と推移する場合であるから、その確率は、

$$\frac{5}{9} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{9} + \frac{5}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{9} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{271}{729} \quad （答）$$

2. $f_n(x)=e^{-nx}+x-1$, $f_n'(x)=-ne^{-nx}+1$ となり $f_n'(x)=0$ となる x は $x=\frac{\log n}{n}$

x	$\cdots$	$\frac{\log n}{n}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗



$\lim_{x\to\infty}\{f_n(x)-(x-1)\}$

$=\lim_{x\to\infty}e^{-nx}=0$ より

$x\to\infty$ で $y=x-1$ に漸近する。

$f_n(0)=0$, $f_n(1)=e^{-n}>0$ であり、

$y=f_n(x)$ のグラフの概形を考えると、

方程式 $f_n(x)=0$ は、$x=0$ ともう1解を $\frac{\log n}{n}<x<1$ の範囲にもつ。

このもう1解を a_n とおくと、

$$e^{-na_n}+a_n-1=0 \quad ① \qquad かつ \qquad \frac{\log n}{n}<a_n<1 \quad ②$$

② より $\log n<na_n<n$ であり、$\lim_{n\to\infty}\log n=\infty$ より $\lim_{n\to\infty}na_n=\infty$ となるので、

① より $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(1-e^{-na_n})=1$ となる。

ここで、グラフより

$$S_n=-\int_0^{a_n}f_n(x)\,dx=-\int_0^{a_n}(e^{-nx}+x-1)\,dx=-\left[-\frac{1}{n}e^{-nx}+\frac{x^2}{2}-x\right]_0^{a_n}$$

$$=\frac{1}{n}e^{-na_n}-\frac{a_n^2}{2}+a_n-\frac{1}{n}$$

上の結果より、$\lim_{n\to\infty}e^{-na_n}=0$, $\lim_{n\to\infty}a_n=1$ であるから、

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}e^{-na_n}-\frac{a_n^2}{2}+a_n-\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}\quad (答)$$

3. まず、$1 \leqq n \leqq p$ のとき $a_n = n$ となることを数学的帰納法により証明する。

[I] $n=1$ のとき、$a_1 = 1$ より成立する。

[II] $n = k\ (1 \leqq k \leqq p-1)$ のとき $a_k = k$ が成り立つと仮定すると、

p は 3 以上の素数で $1 \leqq k \leqq p-1$ より $\gcd(p, a_k) = \gcd(p, k) = 1$

よって $a_{k+1} = a_k + \gcd(p, a_k) = k+1$ が成立する。

以上 [I][II] から、数学的帰納法により、$1 \leqq n \leqq p$ のとき $a_n = n$ となることが示された。

次に、$p \leqq n$ のとき $a_n = (n-p+1)p$ となることを数学的帰納法により証明する。

[I] $n = p$ のとき、上で示した結果より $a_p = p$ であり、$(p-p+1)p = p$ であるから成立する。

[II] $n = k\ (k \geqq p)$ のとき $a_k = (k-p+1)p$ が成り立つと仮定すると、

$\gcd(p, a_k) = \gcd(p, (k-p+1)p) = p$ であるから

$$a_{k+1} = a_k + \gcd(p, a_k) = (k-p+1)p + p = (k+1-p+1)p$$

よって、$n = k+1$ のとき $a_{k+1} = (k+1-p+1)p$ が成立する。

以上 [I][II] から、数学的帰納法により、$p \leqq n$ のとき $a_n = (n-p+1)p$ となることが示された。

したがって、

$$a_n = \begin{cases} n & (1 \leqq n \leqq p-1 \text{ のとき}) \\ (n-p+1)p & (n \geqq p \text{ のとき}) \end{cases}$$

$\cos\left(\dfrac{a_{n+p}}{a_n}\pi\right)$ において、$\dfrac{a_{n+p}}{a_n} = 2k$ (k は整数) となることがあれば、その値は 1 となり最大となるので、$\dfrac{a_{n+p}}{a_n} = 2k$ (k は整数) となる場合を調べる。

まず、$1 \leqq n \leqq p-1$ のとき、$p \leqq n+p$ であるから、$a_n = n$, $a_{n+p} = (n+p-p+1)p = (n+1)p$ となるので、$\dfrac{a_{n+p}}{a_n} = \dfrac{(n+1)p}{n}$ となるが、n と $n+1$ は互いに素, n と p も互いに素であるから、これが整数値をとるのは $n=1$ のときのみであり、このとき $\dfrac{a_{1+p}}{a_1} = \dfrac{2p}{1} = 2p$ となるので $\cos\left(\dfrac{a_{n+p}}{a_n}\pi\right) = 1$ となる。

次に、$p \leqq n$ のとき、$a_n = (n-p+1)p$, $a_{n+p} = (n+p-p+1)p = (n+1)p$ であるから、

$$\frac{a_{n+p}}{a_n} = \frac{(n+1)p}{(n-p+1)p} = \frac{n+1}{n-p+1} = \frac{n-p+1+p}{n-p+1} = 1 + \frac{p}{n-p+1}$$ となって、

これが整数値をとるのは、p が素数より $n-p+1 = 1$ または p であるときであり、それぞれ $n = p,\ 2p-1$ となり、$\dfrac{a_{n+p}}{a_n}$ の値もそれぞれ $p+1,\ 2$ となり、p が奇数より、いずれも 2 の倍数であり、$\cos\left(\dfrac{a_{n+p}}{a_n}\pi\right) = 1$ となる。

以上より、$\cos\left(\dfrac{a_{n+p}}{a_n}\pi\right)$ が最大値 1 をとる n は、$n = 1,\ p,\ 2p-1$ (答)

4. 点Qは平面PDE上より、α, βを実数として、次のように表される。

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OE} + \alpha\overrightarrow{EP} + \beta\overrightarrow{ED} = (0,0,1) + \alpha(p,0,-1) + \beta(1,1,-1)$$

$$= (p\alpha+\beta,\ \beta,\ 1-\alpha-\beta)$$

また、点Qは直線BC上より、sを実数として、次のように表される。

$$\overrightarrow{OQ} = (1-s)\overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{OC} = (1-s)(0,2,0) + s(0,0,2) = (0,\ 2(1-s),\ 2s)$$

よって、
$$\begin{cases} p\alpha+\beta = 0 & \text{——①} \\ \beta = 2(1-s) & \text{——②} \\ 1-\alpha-\beta = 2s & \text{——③} \end{cases}$$

②＋③より $\alpha = -1$

これを①に代入して $\beta = p$

これを②に代入して $s = 1 - \frac{p}{2}$

したがって、$Q(0,\ p,\ 2-p)$ となる。

線分PQ上の点Rは、uを実数として、次のように表される。

$$\overrightarrow{OR} = (1-u)\overrightarrow{OP} + u\overrightarrow{OQ} = (p(1-u),\ pu,\ (2-p)u) \quad (0 \leqq u \leqq 1)$$

$0 \leqq p \leqq 2$ より線分PQは、$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ かつ $z \geqq 0$ を満たす範囲を動き、図形Sはこの範囲の曲面となるので、この曲面Sと平面$x=0$（yz平面）、平面$z=0$（xy平面）で囲まれた部分からなる立体Kの$x \leqq 2y$をみたす部分の平面$y=t$ $(0 \leqq t \leqq 2)$によるきり口の断面積を$S(t)$とおく。

点R(x, y, z)が平面$y=t$上にあるとすると、
$$\begin{cases} x = p(1-u) & \text{——④} \\ y = pu = t & \text{——⑤} \\ z = (2-p)u & \text{——⑥} \end{cases}$$

④⑤より $x = p - t$ ∴ $x + t = p$

⑤⑥より $z = 2u - t$ ∴ $z + t = 2u$

この2式を辺々掛けて $(x+t)(z+t) = 2pu$

∴ $(x+t)(z+t) = 2t$

よって、図形Sの平面$y=t$によるきり口をxz平面に正射影して考えると、曲線$(x+t)(z+t)=2t$ すなわち $z = \frac{2t}{x+t} - t$ となり、図1のようになる。

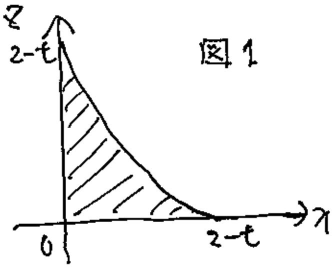


図1

ここで、$x \leqq 2y$ すなわち $x \leqq 2t$ を満たす部分を考えなければならないので、$2-t$ と $2t$ の大小を比較する必要があり、$2-t-2t = 2-3t = -3\left(t-\frac{2}{3}\right)$ であることから、$0 \leqq t \leqq \frac{2}{3}$ と $\frac{2}{3} \leqq t \leqq 2$ に分けて考える。

(i) $0 \leqq t \leqq \frac{2}{3}$ のとき.

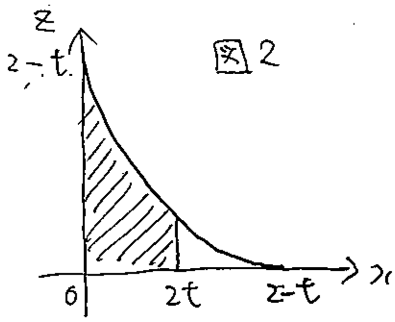


図2のようになり

$$S(t)=\int_0^{2t}\left(\frac{2t}{x+t}-t\right)dx$$
$$=\left[2t\log|x+t|-tx\right]_0^{2t}$$
$$=2t\log(3t)-2t^2-2t\log t$$
$$=2t\log 3-2t^2$$

(ii) $\frac{2}{3} \leqq t \leqq 2$ のとき

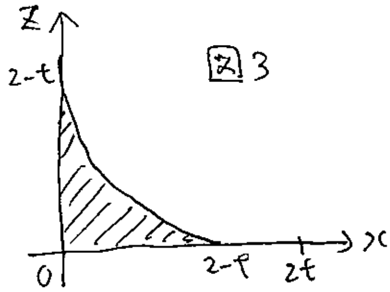


図3のようになり

$$S(t)=\int_0^{2-t}\left(\frac{2t}{x+t}-t\right)dx$$
$$=\left[2t\log|x+t|-tx\right]_0^{2-t}$$
$$=2t\log 2-t(2-t)-2t\log t$$
$$=t^2+2(\log 2-1)t-2t\log t$$

以上より, 求める体積を V とすると,

$$V=\int_0^2 S(t)\,dt=\int_0^{\frac{2}{3}}(2t\log 3-2t^2)\,dt+\int_{\frac{2}{3}}^2\left(t^2+2(\log 2-1)t-2t\log t\right)dt$$
$$=\left[t^2\log 3-2\cdot\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{2}{3}}+\left[\frac{t^3}{3}+(\log 2-1)t^2\right]_{\frac{2}{3}}^2-\left[t^2\log t\right]_{\frac{2}{3}}^2+\int_{\frac{2}{3}}^2 t^2\cdot\frac{1}{t}\,dt$$
$$=\frac{4}{9}\log 3-\frac{16}{81}+\frac{8}{3}+4(\log 2-1)-\frac{8}{81}-\frac{4}{9}(\log 2-1)-4\log 2+\frac{4}{9}\log\frac{2}{3}+\left[\frac{t^2}{2}\right]_{\frac{2}{3}}^2$$
$$=\frac{4}{9}\log 3-\frac{16}{81}+\frac{8}{3}+4\log 2-4-\frac{8}{81}-\frac{4}{9}\log 2+\frac{4}{9}-4\log 2+\frac{4}{9}\log 2-\frac{4}{9}\log 3+2-\frac{2}{9}$$
$$=\frac{16}{27}\quad(答)$$