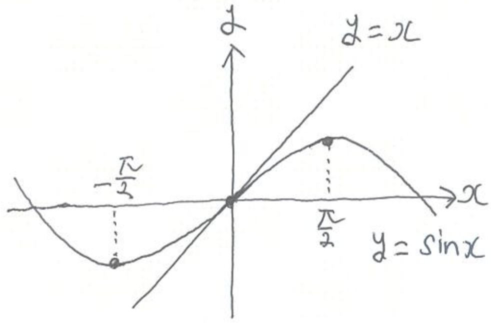
医学部専門予備校　クエスト　解答速報

東京大学（理系）　数学　　試験日 2 月 25 日（水）

$\boxed{1}$ (1) $f(\theta) = \sin\theta - \theta + \frac{1}{6}\theta^3 \quad (-1 \leqq \theta \leqq 1)$

$f'(\theta) = \cos\theta - 1 + \frac{1}{2}\theta^2 \quad (-1 \leqq \theta \leqq 1)$

$f''(\theta) = -\sin\theta + \theta = \theta - \sin\theta$



θ	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f''(\theta)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f'(\theta)$		↘	0	↗	

したがって $f'(\theta) \geqq 0$ より $f(\theta)$ は増加関数

$m = f(-1) = \sin(-1) + \frac{5}{6} = \underline{\frac{5}{6} - \sin 1}$

$M = f(1) = \underline{\sin 1 - \frac{5}{6}} \quad (m = -M)$

(2) $\frac{7}{8}\pi \leqq \int_0^{2\pi} \sin(\cos x)\cos x\,dx \leqq \frac{7}{8}\pi + 4M$ を示す。

(1) より、

$-M \leqq \sin\theta - \theta + \frac{1}{6}\theta^3 \leqq M \quad (-1 \leqq \theta \leqq 1)$

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき、$-1 \leqq \cos x \leqq 1$ より、

$\theta = \cos x$ として、

$-M \leqq \sin(\cos x) - \cos x + \frac{1}{6}\cos^3 x \leqq M \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$

(一) $\cos x - \frac{1}{6}\cos^3 x - M \leqq \sin(\cos x) \leqq \cos x - \frac{1}{6}\cos^3 x + M \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$

したがって、

$\cos^2 x - \frac{1}{6}\cos^4 x - M\cos x \leqq \sin(\cos x)\cos x \leqq \cos^2 x - \frac{1}{6}\cos^4 x + M\cos x$

$\left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi \leqq x \leqq 2\pi\right)$

$\cos^2 x - \frac{1}{6}\cos^4 x + M\cos x \leqq \sin(\cos x)\cos x \leqq \cos^2 x - \frac{1}{6}\cos^4 x - M\cos x$

$\left(\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2}\pi\right)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 x - \frac{1}{6}\cos^4 x - M\cos x\right) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \left(\cos^2 x - \frac{1}{6}\cos^4 x + M\cos x\right) dx + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \left(\cos^2 x - \frac{1}{6}\cos^4 x - M\cos x\right) dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 x - \frac{1}{6}\cos^4 x\right) dx - M\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx + M\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos x\, dx - M\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \cos x\, dx$$

$$\left(\begin{aligned}
&\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + C \\
&\int \cos^4 x\, dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{4}\cos^2 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\right) dx \\
&= \int \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\right) dx = \int \left(\frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}\right) dx \\
&= \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x + C
\end{aligned}\right)$$

$$= \left[-\frac{1}{192}\sin 4x + \frac{5}{24}\sin 2x + \frac{7}{16}x\right]_0^{2\pi} - M\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + M\left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} - M\left[\sin x\right]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}$$

$$= \frac{7}{8}\pi - M - 2M - M = \frac{7}{8}\pi - 4M$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 x - \frac{1}{6}\cos^4 x + M\cos x\right) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \left(\cos^2 x - \frac{1}{6}\cos^4 x - M\cos x\right) dx + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \left(\cos^2 x - \frac{1}{6}\cos^4 x + M\cos x\right) dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 x - \frac{1}{6}\cos^4 x\right) dx + M\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx - M\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos x\, dx + M\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \cos x\, dx$$

$$= \frac{7}{8}\pi + M + 2M + M = \frac{7}{8}\pi + 4M$$

以上より、

$$\frac{7}{8}\pi - 4M \leqq \int_0^{2\pi} \sin(\cos x)\cos x\, dx \leqq \frac{7}{8}\pi + 4M$$

示すべき不等式とヒヒべると、左側が緩くなってしまっているので、
他の方法を考える。

$$\int_0^{2\pi} \sin(\cos x)\cos x\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} \sin(\cos x)\cos x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin(\cos x)\cos x\,dx$$

「$2\pi - x = t$」とおくと、

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin(\cos x)\cos x\,dx$$

$$= \int_{\pi}^{0} \sin(\cos(2\pi - t))\cos(2\pi - t)(-1)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} \sin(\cos t)\cos t\,dt = \int_0^{\pi} \sin(\cos x)\cos x\,dx$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sin(\cos x)\cos x\,dx$$

$$= 2\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\cos x)\cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(\cos x)\cos x\,dx\right\}$$

「$\pi - x = t$」とおくと、

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(\cos x)\cos x\,dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin(\cos(\pi - t))\cos(\pi - t)(-1)\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(-\cos t)(-\cos t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\cos x)\cos x\,dx$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\cos x)\cos x\,dx$$

(1) より、$f(0) \leqq f(\theta) \leqq f(1)$　$(0 \leqq \theta \leqq 1)$ より、

$$0 \leqq \sin\theta - \theta + \frac{1}{6}\theta^3 \leqq M \quad (0 \leqq \theta \leqq 1)$$

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき、$0 \leqq \cos x \leqq 1$ より、

$$0 \leqq \sin(\cos x) - \cos x + \frac{1}{6}\cos^3 x \leqq M$$

$\Longleftrightarrow \cos x - \frac{1}{6}\cos^3 x \leqq \sin(\cos x) \leqq \cos x - \frac{1}{6}\cos^3 x + M \quad (0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2})$

$\Longleftrightarrow \cos^2 x - \frac{1}{6}\cos^4 x \leqq \sin(\cos x)\cos x \leqq \cos^2 x - \frac{1}{6}\cos^4 x + M\cos x \quad (0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2})$

したがって、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - \frac{1}{6}\cos^4 x)\,dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\cos x)\cos x\,dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - \frac{1}{6}\cos^4 x + M\cos x)\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - \frac{1}{6}\cos^4 x)\,dx = \left[-\frac{1}{192}\sin 4x + \frac{5}{24}\sin 2x + \frac{7}{16}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7}{32}\pi$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - \frac{1}{6}\cos^4 x + M\cos x)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{192}\sin 4x + \frac{5}{24}\sin 2x + \frac{7}{16}x + M\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7}{32}\pi + M$$

以上より、

$$\frac{7}{8}\pi \leqq \int_0^{2\pi} \sin(\cos x)\cos x\,dx \leqq \frac{7}{8}\pi + 4M$$

$\sin(\cos x - x) = \sin(\cos x)\cos x - \cos(\cos x)\sin x$ より、

$$\int_0^{2\pi} \sin(\cos x - x)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin(\cos x)\cos x\,dx - \int_0^{2\pi} \cos(\cos x)\sin x\,dx$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(\cos x)\sin x\,dx = \left[-\sin(\cos x)\right]_0^{2\pi} = 0$$

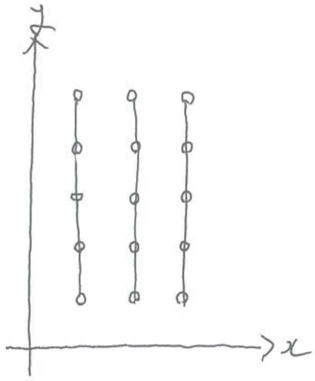
したがって、$\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(\cos x - x)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin(\cos x)\cos x\,dx$

以上より、

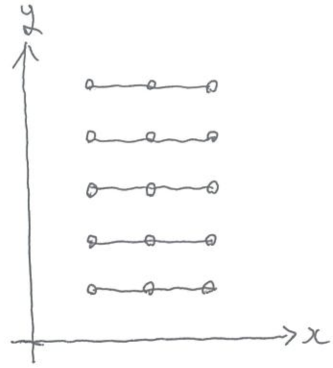
$$\frac{7}{8}\pi \leqq \int_0^{2\pi} \sin(\cos x - x)\,dx \leqq \frac{7}{8}\pi + 4M$$

$\boxed{2}$ (1)　全部で ${}_{15}C_{13} = 5\cdot 7\cdot 13$ 通り

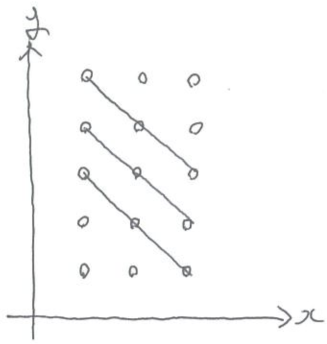
3点が同一直線上にあるときのみ、三角形がつくられない。



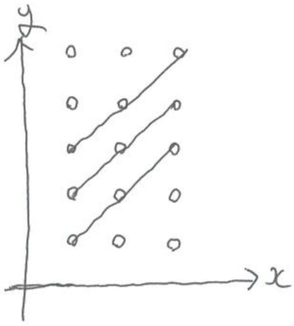
${}_5C_3 \times 3 = 30$ 通り



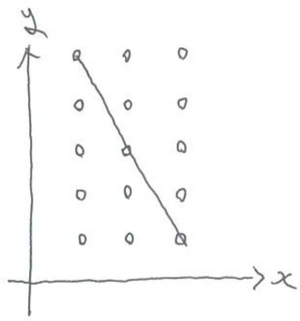
5 通り



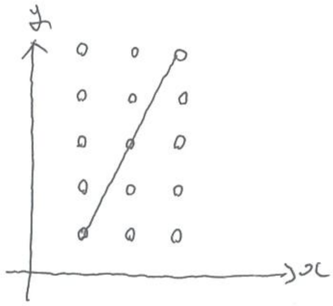
3 通り



3 通り



1 通り



1 通り

以上より、43 通り

$$P_5 = 1 - \frac{43}{5\cdot 7\cdot 13} = \frac{412}{455}$$

(2) 全部で ${}_{6m}C_3 = m(6m-1)(6m-2)$ 通り

3点が $x=1$, $x=2$, $x=3$ 上にあるとき、

${}_{2m}C_3 \times 3 = 2m(2m-1)(m-1)$ 通り。

3点が $y=1$, $y=2$, $y=3$, …, $y=2m$ 上にあるとき, $2m$ 通り

3点が傾き k である直線上にあるときを考える。

(k は自然数)

$y=k(x-1)+1$, $y=k(x-1)+2$, $y=k(x-1)+3$, …

…, $y=k(x-1)+(2m-2k)$ 上にあるときだから、

$(2m-2k)$ 通り。

$$\sum_{k=1}^{m-1}(2m-2k) = 2\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)$$

$$= 2\times\{(m-1)+(m-2)+(m-3)+\cdots+3+2+1\}$$

$$= 2\times\frac{1}{2}m(m-1) = m(m-1)$$

3点が傾き $-k$ である直線上にあるときも同様に考えて、

$$P_{2m} = 1 - \frac{2m(2m-1)(m-1)+2m+m(m-1)\times 2}{m(6m-1)(6m-2)}$$

$$= 1 - \frac{2m\{(2m-1)(m-1)+1+(m-1)\}}{m(6m-1)(6m-2)}$$

$$= 1 - \frac{2m^2-2m+1}{(6m-1)(3m-1)}$$

$$= \frac{16m^2-7m}{(6m-1)(3m-1)} = \underline{\frac{m(16m-7)}{(3m-1)(6m-1)}}$$

医学部専門予備校　クエスト　解答速報

東京大学（理系）　数学　　試験日2月25日（水）

第3問

(1) 球面Sの方程式は $x^2+y^2+z^2=25$ であり,

S上の2点P, Qは xy 平面上にあるから $P(x_1, y_1, 0)$, $Q(x_2, y_2, 0)$

とおけ, RもS上にあるから (x_3, y_3, z_3) とおく

△PQRの重心がG(2, 0, 1)だから

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=2,\quad \frac{y_1+y_2+y_3}{3}=0,\quad \frac{0+0+z_3}{3}=1$$

$$x_1+x_2+x_3=6,\quad y_1+y_2+y_3=0,\quad z_3=3 \quad \cdots ①$$

線分PQの中点MをM$(X, Y, 0)$とおくと

$$X=\frac{x_1+x_2}{2},\quad Y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

①より $x_1+x_2=6-x_3$, $y_1+y_2=-y_3$ だから

$$X=\frac{6-x_3}{2},\quad Y=\frac{-y_3}{2} \qquad \therefore x_3=6-2X,\ y_3=-2Y \quad \cdots ②$$

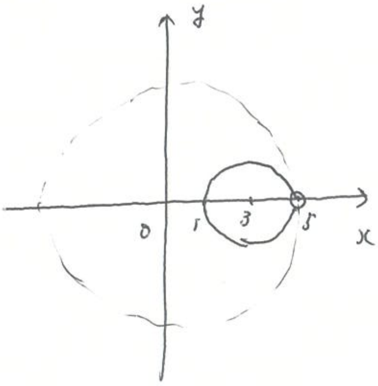
ここでRはS上の点だから $x_3^2+y_3^2+z_3^2=25$

①の $z_3=3$ と②を代入して

$$(6-2X)^2+(-2Y)^2+9=25$$

$$(X-3)^2+Y^2=4 \quad \cdots ③$$

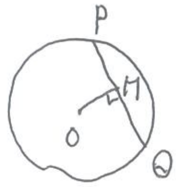
PとQが一致したら中点Mも一致するから ③から $X^2+Y^2=25$ 上の点を除いたものがMの軌跡となる. 図より点(5, 0)を除く.



Mの軌跡を図示すると左図のようになる.

(2) xy平面で $M(X,Y)$ とおくと,

直線PQはMを通り, $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{OM}$ が成り立つ



から直線PQ上の任意の点を $U(x,y)$ として

$\overrightarrow{MU}\cdot\overrightarrow{OM}=0$　∴ $\begin{pmatrix}x-X\\y-Y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=0$

$X(x-X)+Y(y-Y)=0$ …④

これが直線PQの方程式であり. 直線PQが通過する範囲は.

③から点$(5,0)$を除いたものと④の両方をみたす点(X,Y)

が存在する点(x,y)の条件である.

④より　$X^2+Y^2-xX-yY=0$ …④'

③より　$X^2+Y^2-6X+5=0$ …③'

③'−④'より　$(x-6)X+yY+5=0$ …⑤

③かつ④をみたす点(X,Y)が存在する条件は③かつ⑤をみたす点(X,Y)が存在する条件であり, 点と直線の距離の公式から

$$\frac{|3(x-6)+0+5|}{\sqrt{(x-6)^2+y^2}}\leqq 2$$

$$|3x-13|\leqq 2\sqrt{(x-6)^2+y^2}$$

$$(3x-13)^2\leqq 4(x^2+y^2-12x+36)$$

$$9x^2-78x+169\leqq 4x^2+4y^2-48x+144$$

$$5x^2-4y^2-30x\leqq -25$$

$$5(x-3)^2-4y^2\leqq 20$$

$$\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{y^2}{5}\leqq 1$$

これが直線PQの通過する範囲であり, 線分PQは $x^2+y^2\leqq 25$

をみたし. さらにPとQが一致する点$(5,0)$も除かれる.

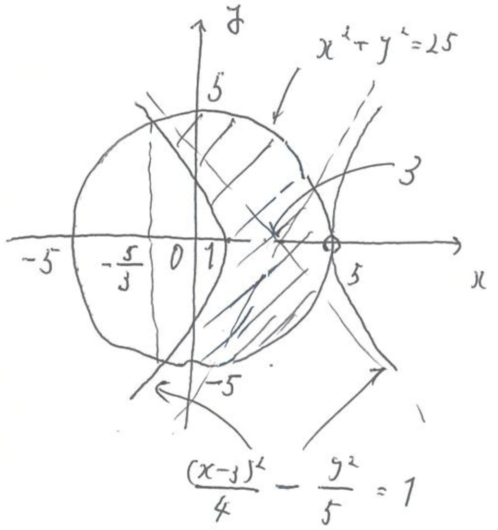
$\dfrac{(x-3)^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ と $x^2+y^2=25$ より y^2 を消去して

$$5(x-3)^2-4(25-x^2)=20$$
$$5x^2-30x+45-100+4x^2=20$$
$$9x^2-30x-75=0$$
$$3x^2-10x-25=0 \quad \therefore (3x+5)(x-5)=0$$

より 双曲線と円の交点の x 座標は $x=-\dfrac{5}{3},\ 5$ である.

以上より 線分PQが通過する範囲は下のようになる.

ただし, 点 $(5,0)$ 以外は境界を含む.



第4問

(1) $C: y=x^3-kx$ より $y'=3x^2-k$

P, Q の x 座標をそれぞれ p, q ($p\neq 0$, $q\neq 0$, $p\neq q$) とおき、

3点 O, P, Q における接線をそれぞれ l_0, l_1, l_2 とする。

y' は $x=0$ で最小となるから l_0 の傾き $-k$ が最小であり、

3接線 l_0, l_1, l_2 で正三角形ができるから、$-k<0$ すなわち

$k>0$ であり、l_0 と x 軸の正の方向とのなす角を α とおくと、l_1, l_2

の傾きは $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$, $\tan\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)$ で表される。

$\tan\alpha=-k<0$ より $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$ …①

$\tan\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)>0$ より $0<\alpha+\frac{2\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$ $\therefore -\frac{2\pi}{3}<\alpha<-\frac{\pi}{6}$ …②

①かつ②より $-\frac{\pi}{2}<\alpha<-\frac{\pi}{6}$ $\therefore \tan\alpha<\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

が必要で $-k<-\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\therefore k>\frac{1}{\sqrt{3}}$

逆に $y'=3x^2-k$ より $-k$ 以上のすべての値を傾きとしてとれるから、

$k>\frac{1}{\sqrt{3}}$ をみたすすべての k に対して、P, Q が存在する。

よって求める k の範囲は $k>\frac{1}{\sqrt{3}}$ …(答)

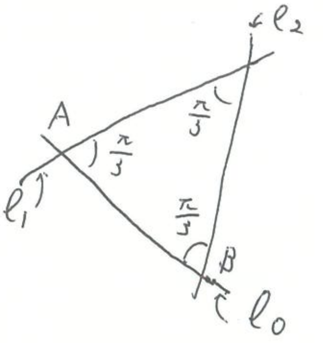
(2) 3接線 l_0, l_1, l_2 で囲まれた三角形は正三角形であり、

l_0: $y=-kx$

l_1: $y=(3p^2-k)(x-p)+p^3-kx$ $\therefore y=(3p^2-k)x-2p^3$

l_2: $y=(3q^2-k)x-2q^3$

であるから、l_0 と l_1 の交点を A、l_0 と l_2 の交点を B として AB の長さを求める。

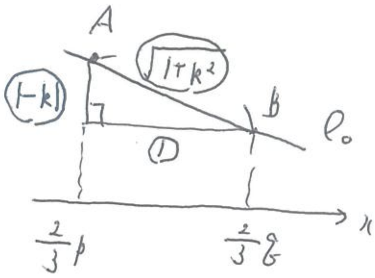


l_0 と l_1 より　$-kx=(3p^2-k)x-2p^3$

$2p^3=3p^2x$

$p\neq 0$ より　$x=\frac{2}{3}p$

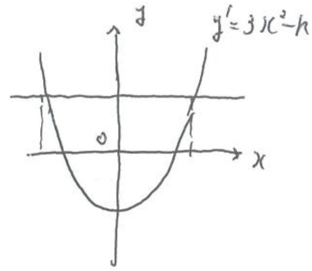
同様に l_0 と l_2 より　$x=\frac{2}{3}q$



直線ABは接線 l_0 で，傾きは $-k$ だから

$$AB=\sqrt{1+k^2}\left|\frac{2}{3}p-\frac{2}{3}q\right|=\frac{2}{3}\sqrt{1+k^2}\,|p-q|$$

より　$S=\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2=\frac{\sqrt{3}}{9}(1+k^2)(p-q)^2$



y' のグラフから　k が一定でも，p, q の値は

1通りに定まらない．　$p^2<q^2$ としても一般性

は失われず，このとき

$$\begin{cases} 3p^2-k=\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right) & \cdots③ \\ 3q^2-k=\tan\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right) & \cdots④ \end{cases}$$

が成り立ち，$\tan\alpha=-k$ を用いて，③，④は

$$3p^2=k+\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{3}}{1-\tan\alpha\cdot\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{-k+\sqrt{3}}{1+k\cdot\sqrt{3}}=\frac{k(\sqrt{3}k+1)-k+\sqrt{3}}{\sqrt{3}k+1}=\frac{\sqrt{3}(k^2+1)}{\sqrt{3}k+1}$$

$$3q^2=k+\frac{\tan\alpha+\tan\frac{2\pi}{3}}{1-\tan\alpha\cdot\tan\frac{2\pi}{3}}=\frac{-k-\sqrt{3}}{1-k\cdot\sqrt{3}}=\frac{k(\sqrt{3}k-1)+k+\sqrt{3}}{\sqrt{3}k-1}=\frac{\sqrt{3}(k^2+1)}{\sqrt{3}k-1}$$

となり，　$p=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{3}(k^2+1)}{3(\sqrt{3}k+1)}}$ $(=p_1,\ -p_1,\ p_1>0$ とおく$)$，$q=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{3}(k^2+1)}{3(\sqrt{3}k-1)}}$

$(=q_1,\ -q_1,\ q_1>0$ とおく$)$ である．

$(p-q)^2$ が最大になるのは p と q が異符号のとき，最小になるのは

p と q が同符号のときだから

$(p-q)^2$ の最大値は　$(p_1+q_1)^2$，最小値は　$(p_1-q_1)^2$

したがって

$$M=\frac{\sqrt{3}}{9}(1+k^2)(p_1+q_1)^2,\quad m=\frac{\sqrt{3}}{9}(1+k^2)(p_1-q_1)^2$$

であり，$M=4m$ より

$$(p_1+q_1)^2=4(p_1-q_1)^2$$

$p^2<q^2$ とおいたから，$p_1<q_1$ となり，

$$p_1+q_1=2(p_1-q_1) \qquad \therefore 3p_1=q_1$$

すなわち $9p_1{}^2=q_1{}^2$

$$9\cdot\frac{\sqrt{3}(k^2+1)}{3(\sqrt{3}k+1)}=\frac{\sqrt{3}(k^2+1)}{3(\sqrt{3}k-1)}$$

$$9(\sqrt{3}k-1)=\sqrt{3}k+1$$

$$8\sqrt{3}k=10 \qquad \therefore k=\frac{5}{4\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{12} \quad \cdots(答)$$

第5問.

(1) $u=z+3$ とおき、$T(u)$, $A(3)$ により点T, 点Aを定める。

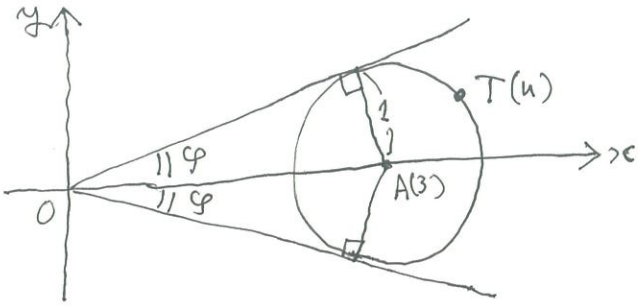
点$P(z)$ が円$C:|z|=1$ 上を動くとき、$z=u-3$ より $|u-3|=1$ であるから、

点$T(u)$の軌跡は、点$A(3)$を中心とする半径 1 の円 $|z-3|=1$ となる。

原点Oから円$|z-3|=1$ に 2接線を引いて、その任意の一方の接線と

実軸の正方向のなす角の大きさを φ $\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ とおく。

このとき、$\sin\varphi=\frac{1}{3}$ が成立する。



ここで、uの偏角 $\arg u$の範囲を $-\varphi\leqq\arg u\leqq\varphi$ としてよいので、

$w=u^3$ の偏角を $\theta=\arg w=\arg(u^3)=3\arg u$ と考えることで

その範囲として $-3\varphi\leqq\theta\leqq3\varphi$ を得る。

$\sin\varphi=\frac{1}{3}<\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$ かつ $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ より $0<\varphi<\frac{\pi}{6}$ となるので

$0<3\varphi<\frac{\pi}{2}$ であり、区間$-3\varphi\leqq\theta\leqq3\varphi$ は区間$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ に

含まれることがわかる。

$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ で $\sin\theta$ は単調増加するので、$\sin\theta$の とりうる値の範囲は

$-\sin3\varphi\leqq\sin\theta\leqq\sin3\varphi$ となる。

ここで、$\sin3\varphi=3\sin\varphi-4\sin^3\varphi=3\cdot\frac{1}{3}-4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{23}{27}$ であるから、

$\sin\theta$のとりうる値の範囲は、

$$-\frac{23}{27}\leqq\sin\theta\leqq\frac{23}{27}\quad(答)$$

(2) $u=z-\alpha$ とおき、$T(u)$, $A(-\alpha)$ により点T, 点Aを定める。

点Pが円 $C:|z|=1$ 上を動くとき、$z=u+\alpha$ より $|u+\alpha|=1$ であるから、

点Tの軌跡は、点Aを中心とする半径1の円 $|z+\alpha|=1$ となる。

ここで、$w=u^3$ が実軸の正の部分の点 $B(t)$ （t は正の実数）と一致するとき

$u^3=t$ となるので、$u=r(\cos\phi+i\sin\phi)$ $(r>0,\ 0\leqq\phi<2\pi)$ とおくと、

$u^3=r^3(\cos3\phi+i\sin3\phi)$ より、k を整数として

$$\begin{cases} r^3=t \\ 3\phi=2k\pi \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} r=\sqrt[3]{t} \\ \phi=\dfrac{2k\pi}{3} \end{cases} \quad (k=0,1,2)$$

となるので、Dが実軸の正の部分と共有点をもつための必要十分条件は、

点 $T(u)$ の軌跡である円 $|z+\alpha|=1$ 上に偏角が 0 または $\frac{2\pi}{3}$ または $\frac{4\pi}{3}$

となる点が存在することである。

また、$w=u^3$ が実軸の負の部分の点 $B'(-t)$ （t は正の実数）と一致するとき、

$u^3=-t=t(\cos\pi+i\sin\pi)$ となるので、$u=r(\cos\phi+i\sin\phi)$ $(r>0,\ 0\leqq\phi<2\pi)$

とおくと、$u^3=r^3(\cos3\phi+i\sin3\phi)$ より、k を整数として

$$\begin{cases} r^3=t \\ 3\phi=\pi+2k\pi \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} r=\sqrt[3]{t} \\ \phi=\dfrac{(2k+1)\pi}{3} \end{cases} \quad (k=0,1,2)$$

となるので、Dが実軸の負の部分と共有点をもつための必要十分条件は、

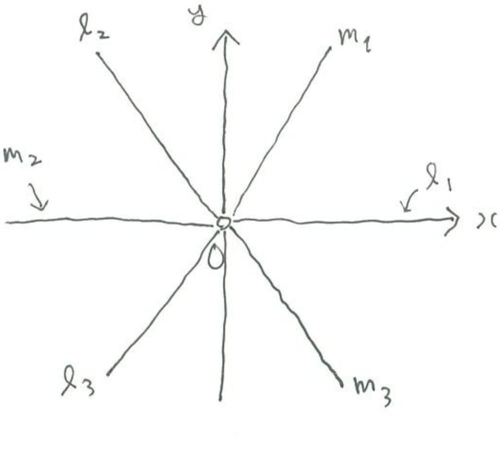
点 $T(u)$ の軌跡である円 $|z+\alpha|=1$ 上に偏角が $\frac{\pi}{3}$ または π または $\frac{5\pi}{3}$

となる点が存在することである。

ここで、原点Oを端点として、偏角 0, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ の方向の半直線を

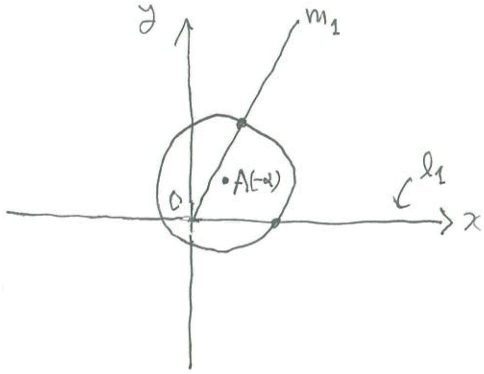
それぞれ l_1, l_2, l_3 とし、偏角 $\frac{\pi}{3}$, π, $\frac{5\pi}{3}$ の方向の半直線をそれぞれ

m_1, m_2, m_3 とおく。ただし、これらの半直線には端点Oは含めないとする。



点 $A(-\alpha)$ が l_1 と m_1 の間の領域にあるとする。すなわち $-\alpha$ の偏角について $0 \leqq \arg(-\alpha) \leqq \frac{\pi}{3}$ を満たす領域にあるとする。

このとき、D が実軸の正の部分および負の部分の両方と共有点を持つための必要十分条件は、円 $|z+\alpha|=1$ が半直線 l_1, m_1 の両方と共有点を持つことである。



複素数平面を xy 直交座標平面と対応させて考えて、$-\alpha = x_0 + y_0 i$ (x_0, y_0：実数) に対して $A(x_0, y_0)$ を対応させる。

点 $A(x_0, y_0)$ が上記の l_1 と m_1 の間の領域にあるとき $\begin{cases} y_0 \geqq 0 \\ y_0 \leqq \sqrt{3}x_0 \end{cases}$ であり、

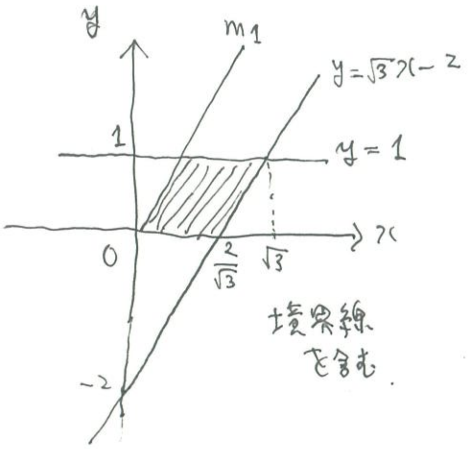
点 $A(x_0, y_0)$ から l_1 までの距離は y_0、点 A から m_1 : $\sqrt{3}x - y = 0$ までの距離は

$$\frac{|\sqrt{3}x_0 - y_0|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{3}x_0 - y_0}{2}$$

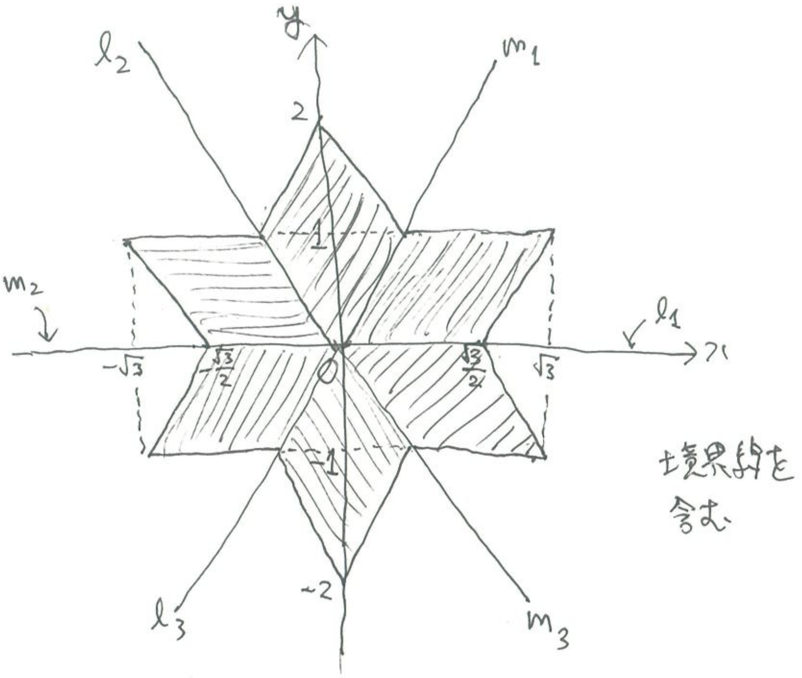
となるので、円 $|z+\alpha|=1$ が l_1, m_1 と共有点をもつ条件より

$$\begin{cases} y_0 \leqq 1 \\ \dfrac{\sqrt{3}x_0 - y_0}{2} \leqq 1 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} y_0 \leqq 1 \\ y_0 \geqq \sqrt{3}x_0 - 2 \end{cases}$$

これより、点 A が l_1 と m_1 の間の領域にあるときの、条件を満たすような点 A の存在領域は下図の斜線部分となる。



点A$(-\alpha)$が、m_1とl_2の間、l_2とm_2の間、m_2とl_3の間、l_3とm_3の間、m_3とl_1の間にある場合は、同様にして、l_1とm_1の間にある場合の領域を$\frac{\pi}{3}$ずつ原点を中心に回転していった領域となるので、題意の条件を満たす点A$(-\alpha)$の存在領域は下図のようになる。



このとき、原点に関する対称性より点R(α)の存在領域は点A$(-\alpha)$の存在領域と一致するので、上図のようになる。

その面積をSとすると、1辺$\frac{\sqrt{3}}{2}$，1つの内角$\frac{\pi}{3}$のひし形6個分より

$$S=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{9\sqrt{3}}{4}\ (答)$$

第6問

(1) 整数 A, B, C が $A \equiv 0 \pmod 3$, $B \equiv 1 \pmod 3$, $C \equiv 2 \pmod 3$ を満たすとき、これらから選んだ2数の積を3で割った余りを表にすると右のようになる。

xy を3で割った余りの表

$y \backslash x$	A	B	C
A	0	0	0
B	0	1	2
C	0	2	1

このことから、3で割った余りが1または2であるいくつかの整数の積を3で割った余りは、その積に含まれる3で割った余りが2である整数の個数を k 個とすると、

$$\begin{cases} k\text{が偶数のとき} \longrightarrow \text{積を3で割った余りは1} \\ k\text{が奇数のとき} \longrightarrow \text{積を3で割った余りは2} \end{cases} \quad \text{——①}$$

となる。

$2800 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7$ と素因数分解されるので、その正の約数は $2^a \cdot 5^b \cdot 7^c$ （a, b, c は整数, $0 \leqq a \leqq 4$, $0 \leqq b \leqq 2$, $0 \leqq c \leqq 1$）という形の整数であるが、$5 \equiv 2 \pmod 3$, $7 \equiv 1 \pmod 3$ と①に注意すると、

$$\begin{cases} 2^a \cdot 5^b \cdot 7^c \text{ を3で割った余りが1となる必要十分条件は } a+b \text{ が偶数} \\ 2^a \cdot 5^b \cdot 7^c \text{ を3で割った余りが2となる必要十分条件は } a+b \text{ が奇数} \end{cases}$$

となることである。

$a+b$ が偶数となる場合は、

a が奇数 $(a=1, 3)$ かつ b が奇数 $(b=1)$

または

a が偶数 $(a=0, 2, 4)$ かつ b が偶数 $(b=0, 2)$

より、$2 \times 1 + 3 \times 2 = 8$ 通りあり、c は $c=0, 1$ の2通りあるから、

$$f(2800) = 8 \times 2 = 16 \quad \text{(答)}$$

$a+b$ が奇数となる場合は

a が奇数 $(a=1, 3)$ かつ b が偶数 $(b=0, 2)$

または

a が偶数 $(a=0, 2, 4)$ かつ b が奇数 $(b=1)$

より、$2 \times 2 + 3 \times 1 = 7$ 通りあり、c は $c=0, 1$ の2通りあるから、

$$g(2800) = 7 \times 2 = 14 \quad \text{(答)}$$

(2) nの正の約数のうち、3で割って1余る素因数のみを含む最大のものを$s(n)$,
3で割って2余る素因数のみを含む最大のものを$t(n)$、nが含む素因数3の個数
をcとおく。例えば、$n=2^2\cdot 3^5\cdot 5^3\cdot 7^4\cdot 11^3\cdot 13^2$のとき、$s(n)=7^4\cdot 13^2$, $t(n)=2^2\cdot 5^3\cdot 11^3$,
$c=5$となる。ただし、nが3で割って1余る素因数を1つも含まないときは$s(n)=1$,
nが3で割って2余る素因数を1つも含まないときは$t(n)=1$とする。
このとき、$n=3^c\cdot s(n)\cdot t(n)$が成立し、正の整数$k$に対して$k$の正の約数の個数を
$e(k)$で表すとすると、(1)の表および①より

$$\begin{cases} f(n)=f(3^c\cdot s(n)\cdot t(n))=f(s(n)\cdot t(n))=e(s(n))\cdot f(t(n)) \\ g(n)=g(3^c\cdot s(n)\cdot t(n))=g(s(n)\cdot t(n))=e(s(n))\cdot g(t(n)) \end{cases}$$

が成立する。
したがって、$f(n)\geqq g(n)$を示すには$f(t(n))\geqq g(t(n))$を示せばよい。
$t(n)=1$のとき、$f(1)=1$, $g(1)=0$より$f(1)\geqq g(1)$は成立する。
$t(n)\geqq 2$のとき、$t(n)=p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdot\cdots\cdot p_m^{a_m}$ ($p_1, p_2, \cdots, p_m$は互いに異なる3で割って2余る素数、$a_1, a_2, \cdots, a_m$は正の整数、mは正の整数)と素因数分解されたとする。($m=1$のとき$t(n)=p_1^{a_1}$, $m=2$のとき$t(n)=p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}$など)

以下では、$f(t(n))\geqq g(t(n))$となることを、異なる素因数の個数mについての数学的帰納法により証明する。
そのために、いくつかの準備をしておく。
一般に、正の整数aに対して、

$$\begin{cases} 0\text{以上}a\text{以下の偶数の個数は}\left[\frac{a}{2}\right]+1\text{ (個)} \\ 0\text{以上}a\text{以下の奇数の個数は}\ a+1-\left(\left[\frac{a}{2}\right]+1\right)=a-\left[\frac{a}{2}\right]\text{ (個)} \end{cases}$$

と表されることに注意する。ただし、実数xに対してxを超えない最大の整数を$[x]$で表すとする。
ここで、aが偶数のとき$\left[\frac{a}{2}\right]=\frac{a}{2}$, aが奇数のとき$\left[\frac{a}{2}\right]=\frac{a-1}{2}$となるので、
$\frac{a-1}{2}\leqq\left[\frac{a}{2}\right]\leqq\frac{a}{2}$が成立し、$\left(\left[\frac{a}{2}\right]+1\right)-\left(a-\left[\frac{a}{2}\right]\right)=2\left[\frac{a}{2}\right]-a+1$
$\geqq 2\times\frac{a-1}{2}-a+1=0$となるから$\left[\frac{a}{2}\right]+1\geqq a-\left[\frac{a}{2}\right]$が成立する。
特に、$\left(\left[\frac{a}{2}\right]+1\right)-\left(a-\left[\frac{a}{2}\right]\right)=\begin{cases}1 & (a\text{が偶数のとき}) \\ 0 & (a\text{が奇数のとき})\end{cases}$ に注意する。

[I] $m=1$ のとき、$t(n)=p^a$ （p は3で割って2余る素数，a は正の整数）とおくと、その正の約数は p^l （$0\leqq l\leqq a$，l は整数）と表され、p^l を3で割った余りが1となるのは l が偶数のとき、p^l を3で割った余りが2となるのは l が奇数のときであるから、

$$f(t(n))=\left[\frac{a}{2}\right]+1\quad,\quad g(t(n))=a-\left[\frac{a}{2}\right]$$

となるので、$\left[\frac{a}{2}\right]+1\geqq a-\left[\frac{a}{2}\right]$ より $f(t(n))\geqq g(t(n))$ が成立する。

[II] $m=k$ のとき $f(t(n))\geqq g(t(n))$ が成立すると仮定するとき．

$t(n)=p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}\cdot p_{k+1}^{a_{k+1}}$ （$p_1,p_2,\cdots,p_{k+1}$ は互いに異なる3で割って2余る素数，$a_1,a_2,\cdots,a_{k+1}$ は正の整数）と素因数分解されたとする。

(i) $p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$ の正の約数 $p_1^{x_1}p_2^{x_2}\cdots p_k^{x_k}$ （$0\leqq x_1\leqq a_1$，$0\leqq x_2\leqq a_2$，$\cdots$，$0\leqq x_k\leqq a_k$，$x_1,x_2,\cdots,x_k$ は整数）を3で割った余りが1となるのは，①より $x_1+x_2+\cdots+x_k$ が偶数のときであり、その個数は $f(p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k})$ 個ある。

これに $p_{k+1}^{x_{k+1}}$ を掛けるとき、（$0\leqq x_{k+1}\leqq a_{k+1}$，$x_{k+1}$ は整数）

$p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}p_{k+1}^{a_{k+1}}$ を3で割った余りが1になるのは x_{k+1} が偶数のときであるから、

x_{k+1} のとり方は $\left[\frac{a_{k+1}}{2}\right]+1$ 通りある。

$p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}p_{k+1}^{a_{k+1}}$ を3で割った余りが2になるのは x_{k+1} が奇数のときであるから，

x_{k+1} のとり方は $a_{k+1}-\left[\frac{a_{k+1}}{2}\right]$ 通りある．

(ii) $p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$ の正の約数 $p_1^{x_1}p_2^{x_2}\cdots p_k^{x_k}$ （$0\leqq x_1\leqq a_1$，$0\leqq x_2\leqq a_2$，$\cdots$，$0\leqq x_k\leqq a_k$，$x_1,x_2,\cdots,x_k$ は整数）を3で割った余りが2となるのは，①より $x_1+x_2+\cdots+x_k$ が奇数のときであり，その個数は $g(p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k})$ 個ある。

これに $p_{k+1}^{x_{k+1}}$ を掛けるとき、（$0\leqq x_{k+1}\leqq a_{k+1}$，$x_{k+1}$ は整数）

$p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}p_{k+1}^{a_{k+1}}$ を3で割った余りが1になるのは x_{k+1} が奇数のときであるから．

x_{k+1} のとり方は $a_{k+1}-\left[\frac{a_{k+1}}{2}\right]$ 通りある。

$p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}p_{k+1}^{a_{k+1}}$ を3で割った余りが2になるのは x_{k+1} が偶数のときであるから，

x_{k+1} のとり方は $\left[\frac{a_{k+1}}{2}\right]+1$ 通りある。

以上(i), (ii) より,

$$\begin{cases} f(p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}p_{k+1}^{a_{k+1}}) = f(p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k})\left(\left[\frac{a_{k+1}}{2}\right]+1\right)+g(p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k})\left(a_{k+1}-\left[\frac{a_{k+1}}{2}\right]\right) \\ g(p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}p_{k+1}^{a_{k+1}}) = f(p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k})\left(a_{k+1}-\left[\frac{a_{k+1}}{2}\right]\right)+g(p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k})\left(\left[\frac{a_{k+1}}{2}\right]+1\right) \end{cases}$$

となるので,

$$f(p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}p_{k+1}^{a_{k+1}}) - g(p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}p_{k+1}^{a_{k+1}})$$

$$= f(p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k})\left(2\left[\frac{a_{k+1}}{2}\right]-a_{k+1}+1\right)+g(p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k})\left(a_{k+1}-2\left[\frac{a_{k+1}}{2}\right]-1\right)$$

$$= \left\{f(p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k})-g(p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k})\right\}\left(2\left[\frac{a_{k+1}}{2}\right]-a_{k+1}+1\right)$$

となるが, 帰納法の仮定より $f(p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k})-g(p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}) \geqq 0$ であり,

また, $2\left[\frac{a_{k+1}}{2}\right]-a_{k+1}+1 = \left(\left[\frac{a_{k+1}}{2}\right]+1\right)-\left(a_{k+1}-\left[\frac{a_{k+1}}{2}\right]\right) \geqq 0$ であるから,

$f(p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}p_{k+1}^{a_{k+1}}) \geqq g(p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}p_{k+1}^{a_{k+1}})$ が成立する。

したがって, $m=k+1$ のときも $f(t(n)) \geqq g(t(n))$ が成立することが示された。

以上 [I] [II] から, 数学的帰納法により, すべての正の整数 n に対して

$f(t(n)) \geqq g(t(n))$ が成立し, これにより $f(n) \geqq g(n)$ が成立する。(証明終)

(3) p を 3 で割って 2 余る素数であり, p は $t(n)$ の素因数に含まれていないとする。

このとき, a を正の整数とすると, (2) の証明中と同様の議論により

$$g(t(n)\cdot p^a) = f(t(n))\left(a-\left[\frac{a}{2}\right]\right)+g(t(n))\left(\left[\frac{a}{2}\right]+1\right)$$

$$\geqq g(t(n))\left(a-\left[\frac{a}{2}\right]\right)+g(t(n))\left(\left[\frac{a}{2}\right]+1\right) \quad (\because f(t(n)) \geqq g(t(n)) \text{ より})$$

$$= (a+1)g(t(n))$$

すなわち, $g(t(n)\cdot p^a) \geqq (a+1)g(t(n))$ が成立する。

よって, $t(n)=p_1^{a_1}\cdots p_m^{a_m}$ のとき, $a_k+1 \geqq 2$ に注意すると,

$$g(p_1^{a_1}\cdots p_m^{a_m}) \geqq g(p_1^{a_1})(a_2+1)\cdots(a_m+1) = \left(a_1-\left[\frac{a_1}{2}\right]\right)(a_2+1)\cdots(a_m+1)$$

$$\geqq 2^{m-1}\left(a_1-\left[\frac{a_1}{2}\right]\right) \geqq 2^{m-1} \qquad \therefore g(p_1^{a_1}\cdots p_m^{a_m}) \geqq 2^{m-1} \text{ —— ②}$$

ここで、(2)の設定で $n=3^c\cdot s(n)\cdot t(n)$ と表したとき、

$g(n)=e(s(n))\cdot g(t(n))=15$ となったとする。

(i) $e(s(n))=15$, $g(t(n))=1$ のとき.

$t(n)=p_1^{a_1}\cdots p_m^{a_m}$ とすると ②より $g(t(n))\geqq 2^{m-1}$ より $1\geqq 2^{m-1}$ $\therefore m=1$

よって、$t(n)=p_1^{a_1}$ となるから $g(t(n))=g(p_1^{a_1})=a_1-\left[\frac{a_1}{2}\right]=1$ となり、

a_1が偶数のとき $a_1-\frac{a_1}{2}=1$ より $a_1=2$ であり、

$f(t(n))=f(p_1^{a_1})=\left[\frac{a_1}{2}\right]+1=\left[\frac{2}{2}\right]+1=2$

a_1が奇数のとき. $a_1-\frac{a_1-1}{2}=1$ より $a_1=1$ であり、

$f(t(n))=f(p_1^{a_1})=\left[\frac{a_1}{2}\right]+1=\left[\frac{1}{2}\right]+1=1$

これより、$f(n)=e(s(n))\cdot f(t(n))$ のとりうる値は.

$f(n)=15\times 2$, 15×1 すなわち $f(n)=30, 15$

(ii) $e(s(n))=5$, $g(t(n))=3$ のとき.

$t(n)=p_1^{a_1}\cdots p_m^{a_m}$ とすると ②より $g(t(n))\geqq 2^{m-1}$ より $3\geqq 2^{m-1}$ $\therefore m=1, 2$

(a) $m=1$ のとき $t(n)=p_1^{a_1}$ となるから $g(t(n))=a_1-\left[\frac{a_1}{2}\right]=3$ となり、

a_1が偶数のとき. $a_1-\frac{a_1}{2}=3$ より $a_1=6$ であり.

$f(t(n))=\left[\frac{a_1}{2}\right]+1=3+1=4$

a_1が奇数のとき. $a_1-\frac{a_1-1}{2}=3$ より $a_1=5$ であり

$f(t(n))=\left[\frac{a_1}{2}\right]+1=2+1=3$

これより、$f(n)=e(s(n))\cdot f(t(n))$ のとりうる値は.

$f(n)=5\times 4$, 5×3 すなわち $f(n)=20, 15$

(b) $m=2$ のとき、$t(n)=p_1^{a_1}p_2^{a_2}$ となるから、

$$g(t(n))=\left(\left[\frac{a_1}{2}\right]+1\right)\left(a_2-\left[\frac{a_2}{2}\right]\right)+\left(a_1-\left[\frac{a_1}{2}\right]\right)\left(\left[\frac{a_2}{2}\right]+1\right)=3$$

このとき、$\left[\frac{a_1}{2}\right]+1$, $a_1-\left[\frac{a_1}{2}\right]$, $\left[\frac{a_2}{2}\right]+1$, $a_2-\left[\frac{a_2}{2}\right]$ のうち 3つの値が1で 1つの値が 2になることになる。

a_1, a_2 の対等性と，$\left[\frac{a_1}{2}\right]+1 \geqq a_1-\left[\frac{a_1}{2}\right]$ より，$\left[\frac{a_1}{2}\right]+1=2$，$a_1-\left[\frac{a_1}{2}\right]=1$，$\left[\frac{a_2}{2}\right]+1=1$，$a_2-\left[\frac{a_2}{2}\right]=1$ としてよい。このとき，$a_1=2$，$a_2=1$ となり，

$$f(t(n))=\left(\left[\frac{a_1}{2}\right]+1\right)\left(\left[\frac{a_2}{2}\right]+1\right)+\left(a_1-\left[\frac{a_1}{2}\right]\right)\left(a_2-\left[\frac{a_2}{2}\right]\right)$$

$$=2\times1+1\times1=3$$

よって，$f(n)=e(s(n))\cdot f(t(n))=5\times3=15$

(iii) $e(s(n))=3$，$g(t(n))=5$ のとき，

$t(n)=p_1^{a_1}\cdots p_m^{a_m}$ とすると②より $g(t(n))\geqq 2^{m-1}$ であるから $5\geqq 2^{m-1}$　$\therefore m=1, 2, 3$

(a) $m=1$ のとき，$t(n)=p_1^{a_1}$ となるから，$g(t(n))=a_1-\left[\frac{a_1}{2}\right]=5$ となり，

a_1 が偶数のとき，$a_1-\frac{a_1}{2}=5$ より $a_1=10$ であり

$$f(t(n))=\left[\frac{a_1}{2}\right]+1=5+1=6$$

a_1 が奇数のとき，$a_1-\frac{a_1-1}{2}=5$ より $a_1=9$ であり

$$f(t(n))=\left[\frac{a_1}{2}\right]+1=4+1=5$$

これより，$f(n)=e(s(n))\cdot f(t(n))$ のとりうる値は

$f(n)=3\times6, 3\times5$　すなわち　$f(n)=18, 15$

(b) $m=2$ のとき，$t(n)=p_1^{a_1}p_2^{a_2}$ となるから，

$$g(t(n))=\left(\left[\frac{a_1}{2}\right]+1\right)\left(a_2-\left[\frac{a_2}{2}\right]\right)+\left(a_1-\left[\frac{a_1}{2}\right]\right)\left(\left[\frac{a_2}{2}\right]+1\right)=5$$

となり，5を実現するのは $4\times1+1\times1$ または $2\times2+1\times1$ または $3\times1+2\times1$ であるが，一般に $\left(\left[\frac{a}{2}\right]+1\right)-\left(a-\left[\frac{a}{2}\right]\right)$ のとりうる値は 0 または 1 であり，$\left[\frac{a}{2}\right]+1\geqq a-\left[\frac{a}{2}\right]$ なので，$4\times1+1\times1$，$2\times2+1\times1$ の形にはなりえない。

$3\times1+2\times1$ の形のとき，a_1, a_2 の対等性より，$\left[\frac{a_1}{2}\right]+1=3$，$a_1-\left[\frac{a_1}{2}\right]=2$，$\left[\frac{a_2}{2}\right]+1=1$，$a_2-\left[\frac{a_2}{2}\right]=1$ としてよい。このとき，$a_1=4$，$a_2=1$ となり，

$$f(t(n))=\left(\left[\frac{a_1}{2}\right]+1\right)\left(\left[\frac{a_2}{2}\right]+1\right)+\left(a_1-\left[\frac{a_1}{2}\right]\right)\left(a_2-\left[\frac{a_2}{2}\right]\right)$$

$$=3\times1+2\times1=5$$

よって，$f(n)=e(s(n))\cdot f(t(n))=3\times5=15$

(c) $m=3$ のとき、$t(n)=p_1^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3}$ となるから、

$$g(t(n))=\left(a_1-\left[\tfrac{a_1}{2}\right]\right)\left(a_2-\left[\tfrac{a_2}{2}\right]\right)\left(a_3-\left[\tfrac{a_3}{3}\right]\right)+\left(a_1-\left[\tfrac{a_1}{2}\right]\right)\left(\left[\tfrac{a_2}{2}\right]+1\right)\left(\left[\tfrac{a_3}{2}\right]+1\right)$$

$$+\left(\left[\tfrac{a_1}{2}\right]+1\right)\left(a_2-\left[\tfrac{a_2}{2}\right]\right)\left(\left[\tfrac{a_3}{2}\right]+1\right)+\left(\left[\tfrac{a_1}{2}\right]+1\right)\left(\left[\tfrac{a_2}{2}\right]+1\right)\left(a_3-\left[\tfrac{a_3}{2}\right]\right)$$

$$=5$$

となり、5を実現するのは $2\times1\times1+1\times1\times1+1\times1\times1+1\times1\times1$ の形しかありえず、

2が1度だけ現れるのは不可能なので不適。

(iv) $e(s(n))=1$, $g(t(n))=15$ のとき、

$t(n)=p_1^{a_1}\cdots p_m^{a_m}$ とすると ② より $g(t(n))\geqq 2^{m-1}$ であるから $15\geqq 2^{m-1}$ ∴ $m=1,2,3,4$

(a) $m=1$ のとき、$t(n)=p_1^{a_1}$ となるから $g(t(n))=a_1-\left[\frac{a_1}{2}\right]=15$ となり、

a_1 が偶数のとき、$a_1-\frac{a_1}{2}=15$ より $a_1=30$ であり、

$f(t(n))=\left[\frac{a_1}{2}\right]+1=16$

a_1 が奇数のとき、$a_1-\frac{a_1-1}{2}=15$ より $a_1=29$ であり、

$f(t(n))=\left[\frac{a_1}{2}\right]+1=15$

これより、$f(n)=e(s(n))\cdot f(t(n))$ のとりうる値は

$f(n)=1\times16,\ 1\times15$ すなわち $f(n)=16,15$

(b) $m=2$ のとき、$t(n)=p_1^{a_1}p_2^{a_2}$ となるから、

$$g(t(n))=\left(\left[\tfrac{a_1}{2}\right]+1\right)\left(a_2-\left[\tfrac{a_2}{2}\right]\right)+\left(a_1-\left[\tfrac{a_1}{2}\right]\right)\left(\left[\tfrac{a_2}{2}\right]+1\right)=15$$

となり、一般に $\left[\frac{a}{2}\right]+1\geqq a-\left[\frac{a}{2}\right]$ で、$\left(\left[\frac{a}{2}\right]+1\right)-\left(a-\left[\frac{a}{2}\right]\right)=0$ または 1

であることに注意すると、$5\times1+5\times2$, $3\times2+3\times3$ の形のみとなる。

(ア) $5\times1+5\times2$ の形のとき、a_1, a_2 の対称性より

$\left[\frac{a_1}{2}\right]+1=5$, $a_1-\left[\frac{a_1}{2}\right]=5$, $\left[\frac{a_2}{2}\right]+1=2$, $a_2-\left[\frac{a_2}{2}\right]=1$

としてよいので、$a_1=9$, $a_2=2$ となり、

$$f(t(n))=\left(\left[\tfrac{a_1}{2}\right]+1\right)\left(\left[\tfrac{a_2}{2}\right]+1\right)+\left(a_1-\left[\tfrac{a_1}{2}\right]\right)\left(a_2-\left[\tfrac{a_2}{2}\right]\right)$$

$$=5\times2+5\times1=15$$

よって、$f(n)=e(s(n))\times f(t(n))=1\times15=15$

(イ) $3\times2+3\times3$ の形のとき、a_1, a_2 の対称性より

$\left[\frac{a_1}{2}\right]+1=3$, $a_1-\left[\frac{a_1}{2}\right]=3$, $\left[\frac{a_2}{2}\right]+1=3$, $a_2-\left[\frac{a_2}{2}\right]=2$

としてよいので、$a_1=5$, $a_2=4$ となり

$f(t(n))=\left(\left[\frac{a_1}{2}\right]+1\right)\left(\left[\frac{a_2}{2}\right]+1\right)+\left(a_1-\left[\frac{a_1}{2}\right]\right)\left(a_2-\left[\frac{a_2}{2}\right]\right)$

$=3\times3+3\times2=15$

よって、$f(n)=e(s(n))\times f(t(n))=1\times15=15$

(c) $m=3$ のとき、$t(n)=p_1^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3}$ となるから

$g(t(n))=\left(a_1-\left[\frac{a_1}{2}\right]\right)\left(a_2-\left[\frac{a_2}{2}\right]\right)\left(a_3-\left[\frac{a_3}{2}\right]\right)+\left(a_1-\left[\frac{a_1}{2}\right]\right)\left(\left[\frac{a_2}{2}\right]+1\right)\left(\left[\frac{a_3}{2}\right]+1\right)$

$+\left(\left[\frac{a_1}{2}\right]+1\right)\left(a_2-\left[\frac{a_2}{2}\right]\right)\left(\left[\frac{a_3}{2}\right]+1\right)+\left(\left[\frac{a_1}{2}\right]+1\right)\left(\left[\frac{a_2}{2}\right]+1\right)\left(a_3-\left[\frac{a_3}{2}\right]\right)$

$=15$

となり、a_1, b_1, c_1 の対等性に注意して、

(ア) $\left[\frac{a_1}{2}\right]+1=a_1-\left[\frac{a_1}{2}\right]=a$, $\left[\frac{a_2}{2}\right]+1=a_2-\left[\frac{a_2}{2}\right]=b$, $\left[\frac{a_3}{2}\right]+1=a_3-\left[\frac{a_3}{2}\right]=c$ のとき

$g(t(n))=4abc=15$ となり不適。

(イ) $\left[\frac{a_1}{2}\right]+1=a+1$, $a_1-\left[\frac{a_1}{2}\right]=a$, $\left[\frac{a_2}{2}\right]+1=a_2-\left[\frac{a_2}{2}\right]=b$, $\left[\frac{a_3}{2}\right]+1=a_3-\left[\frac{a_3}{2}\right]=c$ のとき

$g(t(n))=abc+abc+(a+1)bc+(a+1)bc=2(2a+1)bc=15$ となり不適。

(ウ) $\left[\frac{a_1}{2}\right]+1=a+1$, $a_1-\left[\frac{a_1}{2}\right]=a$, $\left[\frac{a_2}{2}\right]+1=b+1$, $a_2-\left[\frac{a_2}{2}\right]=b$, $\left[\frac{a_3}{2}\right]+1=a_3-\left[\frac{a_3}{2}\right]=c$ のとき

$g(t(n))=abc+a(b+1)c+(a+1)bc+(a+1)(b+1)c=(2a+1)(2b+1)c=15$

ここで、a_1, b_1 の対等性より $a\geqq b$ として考えて、$2a+1\geqq3$, $2b+1\geqq3$ より

$\begin{cases}2a+1=5\\2b+1=3\\c=1\end{cases}$ すなわち $\begin{cases}a=2\\b=1\\c=1\end{cases}$ となり、$\begin{cases}a_1=4\\a_2=2\\a_3=1\end{cases}$ である。このとき

$f(t(n))=\left(\left[\frac{a_1}{2}\right]+1\right)\left(\left[\frac{a_2}{2}\right]+1\right)\left(\left[\frac{a_3}{2}\right]+1\right)+\left(\left[\frac{a_1}{2}\right]+1\right)\left(a_2-\left[\frac{a_2}{2}\right]\right)\left(a_3-\left[\frac{a_3}{2}\right]\right)$

$+\left(a_1-\left[\frac{a_1}{2}\right]\right)\left(\left[\frac{a_2}{2}\right]+1\right)\left(a_3-\left[\frac{a_3}{2}\right]\right)+\left(a_1-\left[\frac{a_1}{2}\right]\right)\left(a_2-\left[\frac{a_2}{2}\right]\right)\left(\left[\frac{a_3}{2}\right]+1\right)$

$=(a+1)(b+1)c+(a+1)bc+a(b+1)c+abc=15$

よって、$f(n)=e(s(n))\times f(t(n))=1\times15=15$

(エ) $\left[\frac{a_1}{2}\right]+1=a+1$, $a_1-\left[\frac{a_1}{2}\right]=a$, $\left[\frac{a_2}{2}\right]+1=b+1$, $a_2-\left[\frac{a_2}{2}\right]=b$, $\left[\frac{a_3}{2}\right]+1=c+1$, $a_3-\left[\frac{a_3}{2}\right]=c$ のとき

$g(t(n))=abc+a(b+1)(c+1)+(a+1)b(c+1)+(a+1)(b+1)c$

$=4abc+2ab+2bc+2ca+a+b+c=15$

このとき、 $8abc+4ab+4bc+4ca+2a+2b+2c=30$

$$(2a+1)(2b+1)(2c+1)-1=30$$

$$\therefore\ (2a+1)(2b+1)(2c+1)=31$$

$2a+1 \geqq 3,\ 2b+1 \geqq 3,\ 2c+1 \geqq 3$ より不適.

(d) $m=4$ のとき $t(n)=p_1^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3}p_4^{a_4}$ となるから

$$\begin{aligned}
g(t(n)) &= \left(\left[\tfrac{a_1}{2}\right]+1\right)\left(a_2-\left[\tfrac{a_2}{2}\right]\right)\left(a_3-\left[\tfrac{a_3}{2}\right]\right)\left(a_4-\left[\tfrac{a_4}{2}\right]\right)\\
&+\left(a_1-\left[\tfrac{a_1}{2}\right]\right)\left(\left[\tfrac{a_2}{2}\right]+1\right)\left(a_3-\left[\tfrac{a_3}{2}\right]\right)\left(a_4-\left[\tfrac{a_4}{2}\right]\right)\\
&+\left(a_1-\left[\tfrac{a_1}{2}\right]\right)\left(a_2-\left[\tfrac{a_2}{2}\right]\right)\left(\left[\tfrac{a_3}{2}\right]+1\right)\left(a_4-\left[\tfrac{a_4}{2}\right]\right)\\
&+\left(a_1-\left[\tfrac{a_1}{2}\right]\right)\left(a_2-\left[\tfrac{a_2}{2}\right]\right)\left(a_3-\left[\tfrac{a_3}{2}\right]\right)\left(\left[\tfrac{a_4}{2}\right]+1\right)\\
&+\left(\left[\tfrac{a_1}{2}\right]+1\right)\left(\left[\tfrac{a_2}{2}\right]+1\right)\left(\left[\tfrac{a_3}{2}\right]+1\right)\left(a_4-\left[\tfrac{a_4}{2}\right]\right)\\
&+\left(\left[\tfrac{a_1}{2}\right]+1\right)\left(\left[\tfrac{a_2}{2}\right]+1\right)\left(a_3-\left[\tfrac{a_3}{2}\right]\right)\left(\left[\tfrac{a_4}{2}\right]+1\right)\\
&+\left(\left[\tfrac{a_1}{2}\right]+1\right)\left(a_2-\left[\tfrac{a_2}{2}\right]\right)\left(\left[\tfrac{a_3}{2}\right]+1\right)\left(\left[\tfrac{a_4}{2}\right]+1\right)\\
&+\left(a_2-\left[\tfrac{a_1}{2}\right]\right)\left(\left[\tfrac{a_2}{2}\right]+1\right)\left(\left[\tfrac{a_3}{2}\right]+1\right)\left(\left[\tfrac{a_4}{2}\right]+1\right)\\
&=15
\end{aligned}$$

となり、この式のとりうる値を小さい方から考えていくと,

$$\begin{aligned}
&1\cdot1\cdot1\cdot1+1\cdot1\cdot1\cdot1+1\cdot1\cdot1\cdot1+1\cdot1\cdot1\cdot1\\
&\quad+1\cdot1\cdot1\cdot1+1\cdot1\cdot1\cdot1+1\cdot1\cdot1\cdot1+1\cdot1\cdot1\cdot1=8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2\cdot1\cdot1\cdot1+1\cdot1\cdot1\cdot1+1\cdot1\cdot1\cdot1+1\cdot1\cdot1\cdot1\\
&\quad+2\cdot1\cdot1\cdot1+2\cdot1\cdot1\cdot1+2\cdot1\cdot1\cdot1+1\cdot1\cdot1\cdot1=12
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2\cdot1\cdot1\cdot1+2\cdot1\cdot1\cdot1+2\cdot1\cdot1\cdot1+2\cdot1\cdot1\cdot1\\
&\quad+2\cdot1\cdot1\cdot1+2\cdot1\cdot1\cdot1+2\cdot1\cdot1\cdot1+2\cdot1\cdot1\cdot1=16
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2\cdot1\cdot1\cdot1+1\cdot2\cdot1\cdot1+1\cdot1\cdot1\cdot1+1\cdot1\cdot1\cdot1\\
&\quad+2\cdot2\cdot1\cdot1+2\cdot2\cdot1\cdot1+2\cdot1\cdot1\cdot1+1\cdot2\cdot1\cdot1=18
\end{aligned}$$

となっていくので値が15になることはない。

以上(i)〜(iv)により, $f(n)$ のとりうる値は.

$$f(n)=15,\ 16,\ 18,\ 20,\ 30 \quad (答)$$