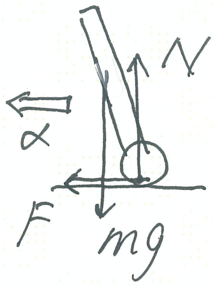
医学部専門予備校　クエスト　解答速報

東京大学（理系）　物理　　試験日 2 月 26 日（木））

第1問

I



剛体棒が水平面から受ける静止摩擦力の大きさを F, 垂直抗力の大きさを N とし、加速度の大きさを α とする。運動方程式（以下、EOM と略記）を立てると、

$$\begin{cases} m\alpha = F \\ 0 = N - mg \end{cases}$$

また、

$$F \leq \mu N$$

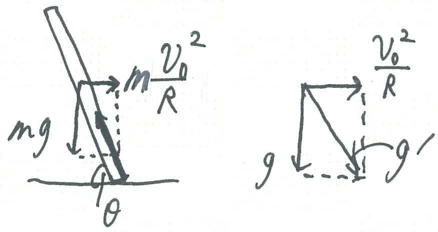
以上から、

$$m\alpha \leq \mu mg$$

$$\therefore \alpha \leq \mu g$$

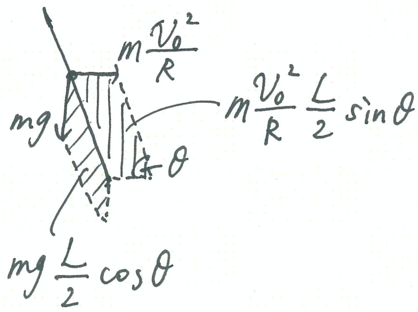
II

(1) 棒に固定した座標系で考えると、棒が受ける力は以下。



$$\tan\theta = \frac{mg}{m\frac{v_0^2}{R}} = \frac{gR}{v_0^2}$$

or 力のモーメントのつり合い



$$0 = mg\frac{L}{2}\cos\theta - m\frac{v_0^2}{R}\frac{L}{2}\sin\theta$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{gR}{v_0^2}$$

(2) EOM.を立てると、

$$\begin{cases} 水平方向：m\dfrac{v^2}{R} = F \\ 鉛直〃：0 = N - mg \end{cases}$$

また、

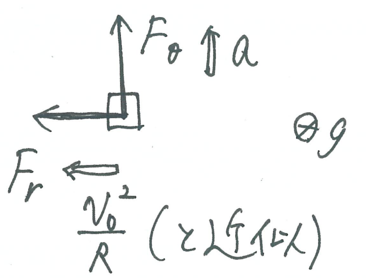
$$F \le \mu N$$

以上から、

$$m\frac{v^2}{R} \le \mu mg$$

$$\therefore v \le \sqrt{\mu g R} = v_1$$

(3)



静止摩擦力の半径方向成分の大きさをF_r，接線方向成分のそれをF_θとする．

EOM.を立てると，

$$\begin{cases} 半径方向：m\dfrac{v_0^2}{R} = F_r \\ 接線〃：ma = F_\theta \end{cases}$$

よって、求める静止摩擦力の大きさFは、

$$F = \sqrt{F_r^2 + F_\theta^2}$$

$$= m\sqrt{\left(\frac{v_0^2}{R}\right)^2 + a^2}$$

(4) $F \le \mu N = \mu mg$

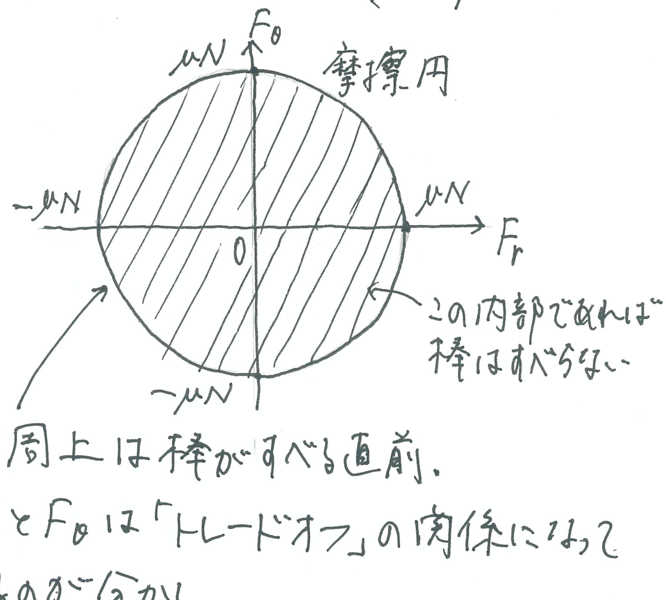
ゆえ、

$$m\sqrt{\left(\frac{v_0^2}{R}\right)^2 + a^2} \le \mu mg$$

$$\therefore a \le \sqrt{(\mu g)^2 - \left(\frac{v_0^2}{R}\right)^2}$$

• $F = \sqrt{F_r^2 + F_\theta^2} \le \mu N$

$$\therefore F_r^2 + F_\theta^2 \le (\mu N)^2$$



円周上は棒がすべる直前．

F_rとF_θは「トレードオフ」の関係になっているのが分かる．

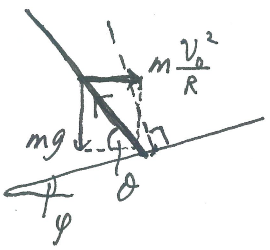
つまり、

曲がるために力 F_r を使えば F_θ は小さくなり進行方向の加速は小さくなる。
進行方向の加速のために F_θ を使えば F_r は小さくなり横すべりしやすくなる。

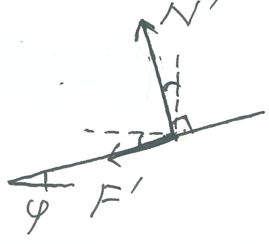
III

(1) II(1) と同様に考えて、

$$\tan\theta = \frac{gR}{v_0^{\,2}}$$



(2) 棒が路面から受ける垂直抗力の大きさを N'，静止摩擦力の大きさを F' とする。



EOM. を立てると、

$$\begin{cases} \text{水平方向}: m\dfrac{v^2}{R} = F'\cos\varphi + N\sin\varphi & \cdots ① \\ \text{鉛直〃}: \quad 0 = N\cos\varphi - F'\sin\varphi - mg & \cdots ② \end{cases}$$

① × $\sin\varphi$ − ② × $\cos\varphi$ から F' を消して、

$$N' = m\frac{v^2}{R}\sin\varphi + mg\cos\varphi$$

よって、

$$F' = m\frac{v^2}{R}\cos\varphi - mg\sin\varphi$$

$F' \leq \mu N'$ を考えて、

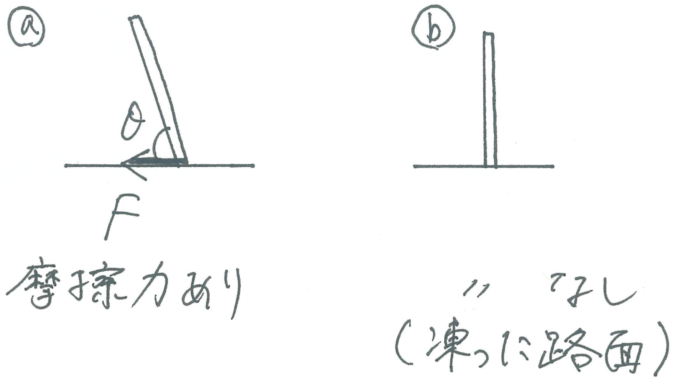
$$m\frac{v^2}{R}\cos\varphi - mg\sin\varphi \leq \mu m\frac{v^2}{R}\sin\varphi + \mu mg\cos\varphi$$

$$\therefore v \leq \sqrt{\frac{\mu + \tan\varphi}{1 - \mu\tan\varphi}gR} = v_2$$

(3)
$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{\mu + \tan\varphi}{(1 - \mu\tan\varphi)\mu}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\tan\varphi}{\mu}}{1 - \mu\tan\varphi}} > 1$$

これより、勾配がついている方が、すべることなくより大きな速さで等速円運動できる（カーブできる）ゆえ。

・バンク角 θ と傾斜角 φ



ⓐ Fを向心力としてカーブできる

ⓑ 凍った路面だと $F \simeq 0$ ゆえ、カーブするのは難しい

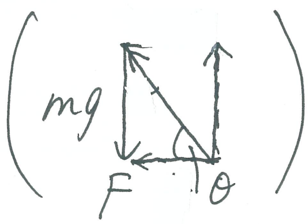
EOM.より、

ⓐ：$m\dfrac{v^2}{R} = F$

これより、v ㊀大 や R ㊀小 で F ㊀大.

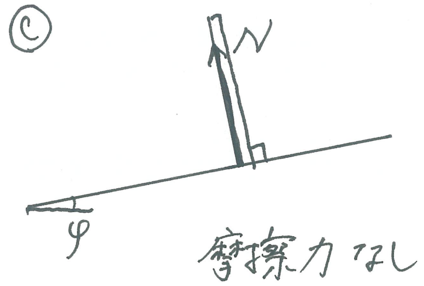
ここで、

$$F = \frac{mg}{\tan\theta}$$



より、F 大 にしたければ θ 小 にしなければならない。

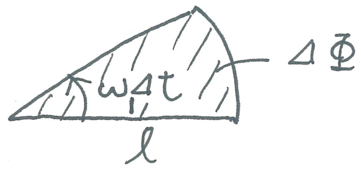
つまり、速さが大きかったり、半径の小さい道の場合は、より大きく傾かなければならない(θ 小 にしなければならない)。これは日常生活から実感できるのではないだろうか。



$\varphi \neq 0$ の場合は、たとえ路面が凍っていたとしても、Nの水平成分によって円運動(カーブ)することができる。ただし、この場合の速さは $\sqrt{gR\tan\varphi}$ に限られる。(計算してみよう。)

第2問

I



微小時間 Δt の間に、導体棒が横切る磁束を $\Delta\Phi$ とすると、

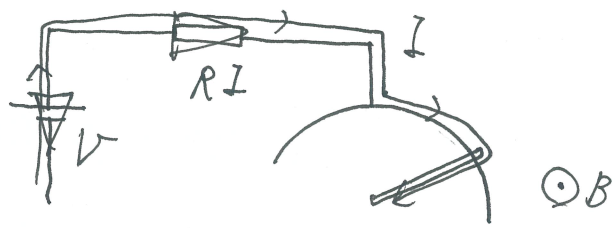
$$\Delta\Phi = B\frac{1}{2}l^2\omega_1\Delta t$$

よって、

$$E_1 = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \underbrace{\frac{1}{2}Bl^2\omega_1}_{=\alpha}$$

II

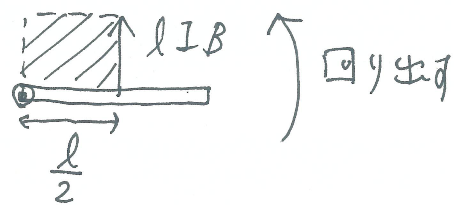
(1)



スイッチON直後

スイッチを入れた直後、棒に発生する誘導起電力は0と考えられるので、棒に流れる電流の大きさ I は、

$$I = \frac{V}{R}$$



よって、求める力のモーメントの大きさは、

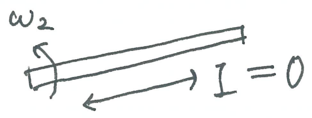
$$lIB\frac{l}{2} = \frac{VBl^2}{2R}$$

(2) (あ)

(3) キルヒホッフ第2法則より、

$$V - \alpha\omega_2 = 0$$

$$\therefore\ \omega_2 = \frac{V}{\alpha}$$



III 棒に生じる誘導起電力の大きさは $\alpha\omega_3$ である。これがコンデンサー1の電圧に等しいので、求める静電エネルギーは、

$$\frac{1}{2}C_1(\alpha\omega_3)^2$$

IV

(1)

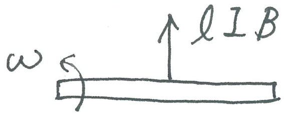
題意より、

$$\begin{cases} \frac{1}{2}C_2(\alpha\omega)^2 = \frac{1}{2}\beta\omega^2 \\ Q_2 = C_2\alpha\omega \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} C_2 = \dfrac{\beta}{\alpha^2} \\ Q_2 = \dfrac{\beta}{\alpha}\omega \end{cases}$$

・

i)



(天下り的だが) EOM. より、

$$\beta\frac{d\omega}{dt} = lIB\frac{l}{2} = \alpha I$$

慣性モーメント
(回転運動の変化のしにくさを示す物理量)

また、$V = \alpha\omega$ より、

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{\alpha}\frac{dV}{dt}$$

よって、2式から $\frac{d\omega}{dt}$ を消すと、

$$\frac{\beta}{\alpha}\frac{dV}{dt} = \alpha I$$

$$\therefore I = \frac{\beta}{\alpha^2}\frac{dV}{dt} \cdots あ$$

ここで、$Q = CV$, $I = \frac{dQ}{dt}$ より、

$$I = C\frac{dV}{dt} \cdots い$$

あといを比較して、

$$C = \frac{\beta}{\alpha^2}$$

慣性モーメント β 大で C 大.

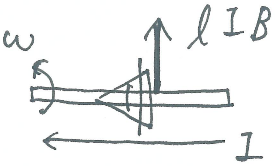
ソレノイドコイルの場合、

$$V = L\frac{dI}{dt}$$

$$\therefore I = \frac{1}{L}\int V\,dt \cdots う$$

あとうを比較するのは不可能.
ゆえに、O−P間の部分を「仮想ソレノイドコイル」とみなすことはできない.

ii) エネルギーについて



誘導起電力がした仕事率 P

$$P = -\alpha\omega I$$

アンペール力が 〃 P'

$$P' = lIB\cdot\underbrace{\frac{l}{2}\omega}_{v}$$

$$= \alpha\omega I$$

$$\therefore P + P' = 0$$

「ローレンツ力は仕事をしない」ことの現れ

(2) スイッチをYに切り替えて十分に時間が経過したときのコンデンサー1, 2の電圧は等しい。それをV'とすると、電荷保存則より、

$$C_2V = (C_1+C_2)V'$$

$$\therefore V' = \frac{C_2}{C_1+C_2}V$$

よって、コンデンサー1の静電エネルギーは、

$$\frac{1}{2}C_1V'^2 = \frac{1}{2}C_1\left(\frac{C_2}{C_1+C_2}V\right)^2$$

(3) 題意より、

$$V' = \alpha\omega_3$$

$$\therefore \omega_3 = \frac{C_2V}{\alpha(C_1+C_2)}$$

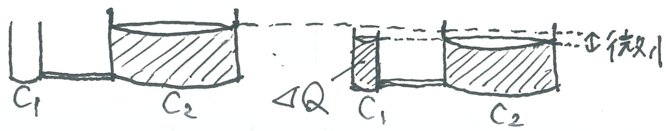
- $C_2 \gg C_1$ の場合

$$\omega_3 = \frac{V}{\alpha\left(\frac{C_1}{C_2}+1\right)}$$

$$\approx \frac{V}{\alpha} = \omega_2$$

つまり、ωはほとんど変わらない。$C=\frac{\beta}{\alpha^2}$と表せることから、C大でβ大。すなわち、回転運動の変化は小さいと考えられ、$\omega_3\approx\omega_2$にも納得できる。「β大⇔ω変化小⇔C大」であり、力学を電磁気($\beta\to C$)によって説明できるのがとても興味深い。

イメージ



$Q=\frac{\beta}{\alpha}\omega$ より、$\Delta Q = \frac{\beta}{\alpha}\Delta\omega$

$\Delta\omega$微小ゆえ、ΔQも微小。

$C_1 \gg C_2$の場合

$\omega_3\approx 0$, 電圧 $=\alpha\omega\approx 0$

つまり、C_2の電圧は急激に下がる。

第3問

I

(1) L_1 と S の距離を b とする。

写像公式より、

$$\frac{1}{D}+\frac{1}{b}=\frac{1}{d}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{b}=\frac{D-d}{dD}$$

$$\approx \frac{D}{dD} \quad (\because D \gg d)$$

$$\therefore \quad b \approx d$$

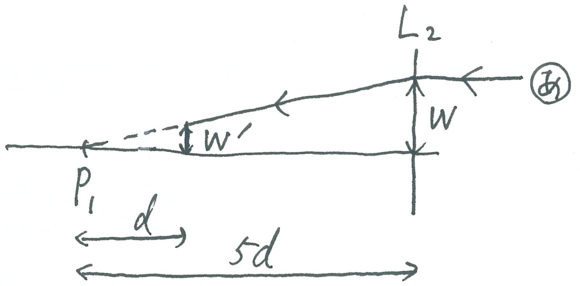
(2) (b)

(3) L_3 の焦点距離を f_3 とする。

写像公式より、

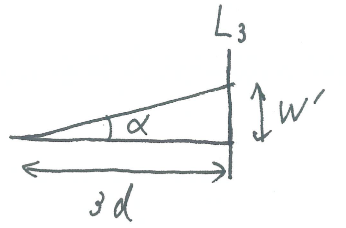
$$\frac{1}{-d}+\frac{1}{3d}=\frac{1}{-f_3}$$

$$\therefore \quad f_3=\frac{3}{2}d$$



$$W' : W = d : 5d$$

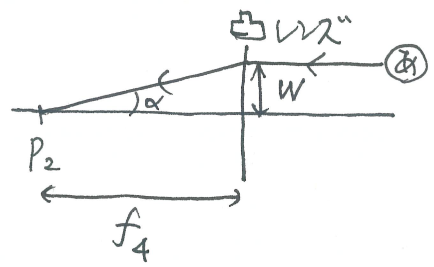
$$\therefore \quad W'=\frac{1}{5}W$$



$$\tan\alpha=\frac{W'}{3d}$$

$$=\frac{W}{15d}$$

(4)



求める焦点距離を f_4 とする。

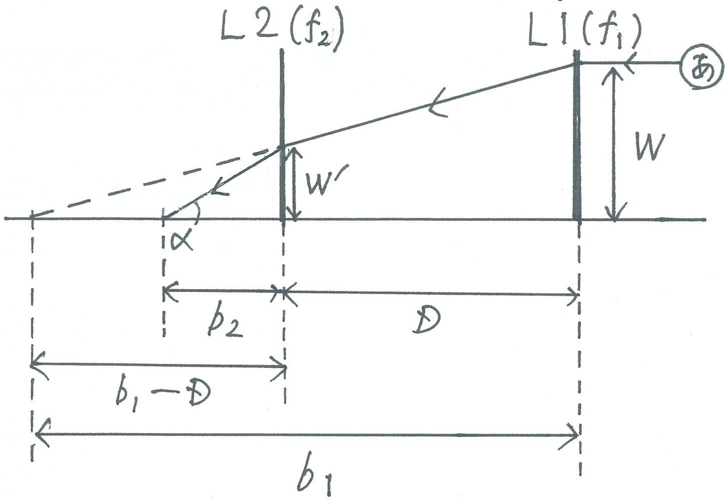
$$\tan\alpha=\frac{W}{f_4}$$

$$\therefore \quad f_4=\frac{W}{\frac{W}{15d}}$$

$$=15d$$

(5) 単一の凸レンズだと焦点距離が $15d$，図3-2の組み合わせレンズだと $7d$ であり，後者だと望遠レンズの大きさを小さくすることができる。

• 合成焦点距離 F の式を導く



右からレンズL1（焦点距離 f_1），レンズL2（〃 f_2）とする。さしあたり，$f_1>0$, $f_2>0$ とする。

写像公式より，

$$\begin{cases} \mathrm{L1}: \dfrac{1}{\infty}+\dfrac{1}{b_1}=\dfrac{1}{f_1} \cdots ア \\ \mathrm{L2}: \dfrac{1}{-(b_1-D)}+\dfrac{1}{b_2}=\dfrac{1}{f_2} \cdots イ \end{cases}$$

また，

$$\tan\alpha=\frac{W'}{b_2} \cdots ウ$$

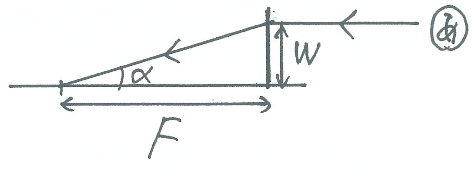
相似比を考えて，

$$(b_1-D):W'=b_1:W$$

$$\therefore W'=\frac{b_1-D}{b_1}W \cdots エ$$

定義：

$$\underbrace{\frac{1}{F}\equiv\frac{\tan\alpha}{W}}_{\uparrow\ \mathrm{I}(4)} \cdots オ$$



アより，

$$b_1=f_1$$

これをイに代入して，

$$\frac{1}{D-f_1}+\frac{1}{b_2}=\frac{1}{f_2}$$

$$\therefore \frac{1}{b_2}=\frac{1}{f_2}-\frac{1}{D-f_1} \cdots イ'$$

エをウに代入して，

$$\tan\alpha=\frac{1}{b_2}\frac{f_1-D}{f_1}W$$

これにオを代入して，

$$\frac{\tan\alpha}{W}=\frac{1}{F}=\frac{1}{b_2}\frac{f_1-D}{f_1}$$

これにイ′を代入して，

$$\frac{1}{F}=\left(\frac{1}{f_2}-\frac{1}{D-f_1}\right)\frac{f_1-D}{f_1}$$

$$=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}-\frac{D}{f_1f_2} \cdots カ$$

$D\approx 0$（L1とL2が非常に近い）なら，

$$\frac{1}{F}\approx\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}$$

（覚えている人もいるでしょう）

本問では、

$$f_1 = 5d,\ f_2 = -\frac{3}{2}d,\ D = 4d$$

ゆえ、これらを㋕に代入して、

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{5d} - \frac{2}{3d} - \frac{4d}{5d\left(-\frac{3}{2}d\right)}$$

$$= \frac{1}{15d}$$

$$\therefore F = 15d$$

Ⅱ

(1)

$$\overline{W_2Q}^2 = (d\cos\beta - x)^2 + (d\sin\beta - y)^2$$

$$= d^2 + x^2 + y^2 - 2d(x\cos\beta + y\sin\beta)$$

$$\approx d^2 - 2d(x\cos\beta + y\sin\beta)$$

$$(\because |x|, |y| \ll d)$$

よって、

$$\overline{W_2Q} = d\left(1 - \frac{2}{d}(x\cos\beta + y\sin\beta)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx d(1 - (x\cos\beta + y\sin\beta))$$

$$\overline{W_1Q}^2 = (d - x)^2 + y^2$$

$$= d^2 + x^2 + y^2 - 2xd$$

$$\approx d^2 - 2xd$$

よって、

$$\overline{W_1Q} = d\left(1 - \frac{2x}{d}\right)^{1/2}$$

$$\approx d - x$$

以上から、

$$\Delta L = x - (x\cos\beta + y\sin\beta)$$

$$= x(1 - \cos\beta) - y\sin\beta$$

(2) 題意より、

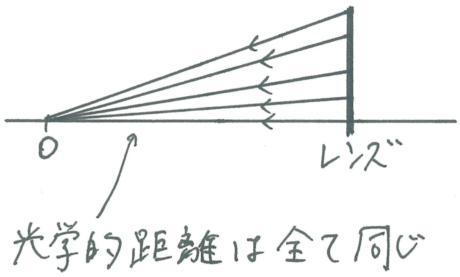
$$x(1 - \cos\beta) - y\sin\beta = \frac{\lambda}{2}$$

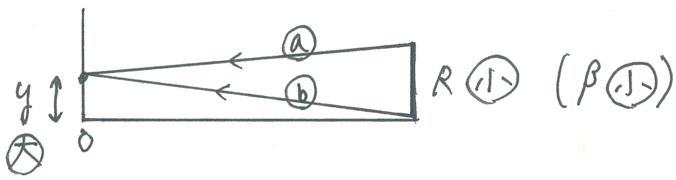
$x = 0$ として、

$$|y| = \frac{\lambda}{2\sin\beta}$$

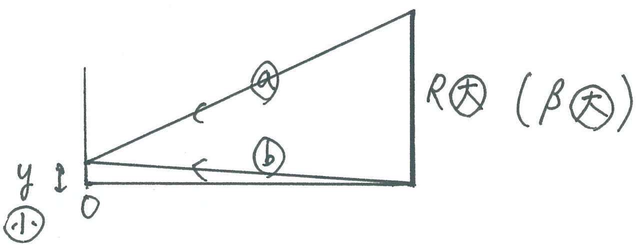
・この式から「β 大 で $|y|$ 小」だと分かる。題意より、β とレンズの大きさはほぼ比例の関係だと考えられる。つまり、β 大 $\Leftrightarrow$ R 大。

これは、レンズが大きいほどボケ（ピンボケ）が小さいことを示している。望遠鏡のレンズを巨大化させたい理由の1つがこの問題から分かる。





R小だと、光線ⓐとⓑの光路差が $\frac{\lambda}{2}$ になるためには y大でなければならない。



R大だと、yの値が $y=0$ から少しずれただけでⓐとⓑの光路差が $\frac{\lambda}{2}$ となる。

(3) 図3-3より、

$$\tan\beta = \frac{R}{d} = \frac{5}{12}$$

$$\therefore \sin\beta = \frac{5}{13}$$

$$\therefore |y| = \frac{5\times10^{-7}\,\mathrm{m}}{2\,\frac{5}{13}} = 6.5\times10^{-7}\,\mathrm{m}$$

（λ小で|y|小。つまり、赤色よりも紫色や青色の方が「シャープ」。）

I(2)より、

$$H = \frac{D}{d}|y| \quad (h=|y|\text{とした})$$

$$= \frac{1.2\times10^{2}\,\mathrm{m}}{12\times10^{-2}\,\mathrm{m}}\times6.5\times10^{-7}\,\mathrm{m}$$

$$= 6.5\times10^{-4}\,\mathrm{m}$$

(4) II(1)の式で $y=0$ として、

$$x(1-\cos\beta) \leq \frac{\lambda}{2}$$

$x<0$ も考慮して、

$$|x| \leq \frac{\lambda}{2(1-\cos\beta)}$$

（β大で $1-\cos\beta$ 大。ゆえに|x|小。β大⇔R大であることを考慮すると、R大でx, y方向ともにボケは小さくなることが分かる。）