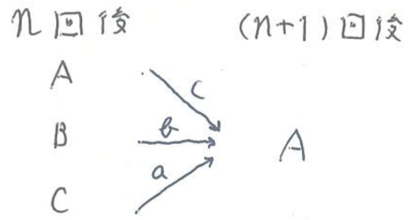
# 医学部専門予備校　クエスト　解答速報

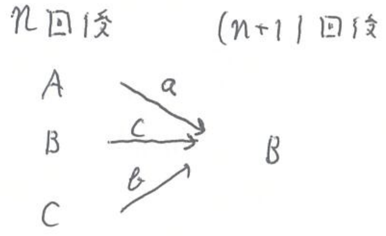
## 日本医科大学（後期）　数学

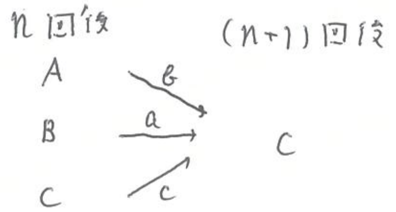
試験日 2 月 28 日（土）

ミライを拓く 武器を君に

[1] 問1. 3点 A, B, C の移動を図にすると次のようになる.




（ただし $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{4}$）

したがって

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\
b_{n+1} &= \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \qquad \cdots（答）\\
c_{n+1} &= \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n
\end{aligned}
$$

問2. 全確率の和は 1 だから すべての整数 $n(\geqq 0)$ について

$$a_n + b_n + c_n = 1$$

が成り立つ. これと問1の結果を用いて

$$
\begin{aligned}
a_{n+3} &= \frac{1}{4}(a_{n+2}+b_{n+2}+c_{n+2}) + \frac{1}{4}b_{n+2} = \frac{1}{4}b_{n+2} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{4}(a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}) + \frac{1}{4}c_{n+1}\right\} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{16}c_{n+1} + \frac{5}{16} = \frac{1}{16}\left\{\frac{1}{4}(a_n+b_n+c_n) + \frac{1}{4}a_n\right\} + \frac{5}{16} \\
&= \frac{1}{64}a_n + \frac{21}{64} \qquad \cdots（答）
\end{aligned}
$$

問3. 問2の結果より

$$a_{3(n+1)} = \frac{1}{64}a_{3n} + \frac{21}{64}$$

$$a_{3(n+1)} - \frac{1}{3} = \frac{1}{64}\left(a_{3n} - \frac{1}{3}\right)$$

数列 $\left\{a_{3n}-\frac{1}{3}\right\}$ は公比 $\frac{1}{64}$ の等比数列だから

$$a_{3n}-\frac{1}{3}=\left(a_0-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{64}\right)^n=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{64}\right)^n$$

$$a_{3n}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{64}\right)^n+\frac{1}{3} \quad \cdots(答)$$

問4. 問3と同様にして　$c_{n+3}=\frac{1}{64}c_n+\frac{21}{64}$ が成り立つから

$$c_{3(n+1)}=\frac{1}{64}c_{3n}+\frac{21}{64} \qquad \therefore c_{3(n+1)}-\frac{1}{3}=\frac{1}{64}\left(c_{3n}-\frac{1}{3}\right)$$

$c_0=0$ より　$c_{3n}=\left(c_0-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{64}\right)^n+\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{64}\right)^n+\frac{1}{3}$

よって $b_{3n+1}=\frac{1}{4}(a_{3n}+b_{3n}+c_{3n})+\frac{1}{4}c_{3n}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left\{-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{64}\right)^n+\frac{1}{3}\right\}$

$$=-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{64}\right)^n+\frac{1}{3}$$

$$a_{3n}-b_{3n+1}=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{64}\right)^n$$

だから　$|a_{3n}-b_{3n+1}|<\left(\frac{1}{3}\right)^{99}$ は

$$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{64}\right)^n<\left(\frac{1}{3}\right)^{99}$$

10を底とする対数をとって

$$\log_{10}\frac{3}{4}+n\log_{10}\frac{1}{64}<99\log_{10}\frac{1}{3}$$

$$\log_{10}3-2\log_{10}2+n(-6\log_{10}2)<99(-\log_{10}3)$$

$$100\log_{10}3-2\log_{10}2<6n\log_{10}2$$

$$\frac{50\log_{10}3-\log_{10}2}{3\log_{10}2}<n$$

$$\frac{50\cdot 0.4771-0.3010}{3\cdot 0.3010}<n \qquad \therefore \frac{23.554}{0.9030}<n$$

これを計算して $n>26.08\cdots$

求める最小な自然数は　27　…(答)

［Ⅱ］ 問1. $w=\dfrac{(-1+3i)z+2i}{2z+2}$ より

$w(2z+2)=(-1+3i)z+2i$　∴ $(2w+1-3i)z=-2w+2i$

よって $z=\dfrac{-2w+2i}{2w+1-3i}$ …①

$z$ は $|z|=\sqrt{2}$ をみたすから

$$\left|\frac{-2w+2i}{2w+1-3i}\right|=\sqrt{2}$$

$$2|w-i|=\sqrt{2}\,|2w+1-3i|$$

両辺 2 乗して $2|w-i|^2=|2w+1-3i|^2$

$w=x+yi$ ($x, y$ は実数) とおくと

$$2|x+(y-1)i|^2=|(2x+1)+(2y-3)i|^2$$

$$2\{x^2+(y-1)^2\}=(2x+1)^2+(2y-3)^2$$

$$2x^2+2y^2+4x-8y+8=0$$

$$x^2+y^2+2x-4y+4=0$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2=1$$

よって，$C_2$ は 中心 $-1+2i$，半径 1 の円である．
図示すると 図1 のようになる．

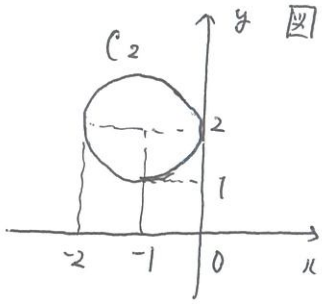


図1

問2. $w^2=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi$ より $w^2$ が実数 となるとき，

$2xy=0$ よって $x=0$ または $y=0$

問1 より これを満たす $w$ は $w=2i$

①に代入して $z=\dfrac{-2\cdot 2i+2i}{2\cdot 2i+1-3i}=\dfrac{-2i}{1+i}=\dfrac{-2i(1-i)}{2}=-1-i$ …(答)

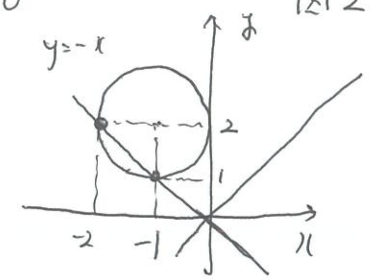
問3. $w^2$ が純虚数 のとき，$x^2-y^2=0$ かつ $2xy\neq 0$

すなわち 「$y=x$ または $y=-x$」 かつ $x\neq 0$

これを満たす $C_2$ 上の点は，図2 より

$w=-1+i,\ -2+2i$

図2



①に代入して

(ア) $w=-1+i$ のとき

$$z=\frac{-2(-1+i)+2i}{2(-1+i)+1-3i}=\frac{2}{-1-i}=-1+i$$

(イ) $w=-2+2i$ のとき

$$z=\frac{-2(-2+2i)+2i}{2(-2+2i)+1-3i}=\frac{4-2i}{-3+i}=-\frac{7}{5}+\frac{1}{5}i$$

以上より　$z=-1+i,\ -\frac{7}{5}+\frac{1}{5}i$ …（答）

［Ⅲ］問1.　$x\neq 2^n l\pi$ のとき $\frac{x}{2^n}\neq l\pi$　$\therefore \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\neq 0$

$C_n=C_{n-1}(x)\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$ の両辺に $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$ をかけて

$$C_n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)=C_{n-1}(x)\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)=\frac{1}{2}C_{n-1}(x)\sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)$$

数列 $\left\{C_n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\right\}$ は公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列だから

$$C_n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)=\{C_0(x)\sin x\}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\cos x\sin x\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\sin 2x}{2^{n+1}}$$

よって　$C_n(x)=\dfrac{\sin 2x}{2^{n+1}\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$

問2.　$x=\frac{\pi}{8}$ のとき，$C_n(x)>0$，$n\geqq 0$ のとき $0<\frac{x}{2^n}=\frac{\pi}{2^{n+3}}<\frac{\pi}{2}$

だから $\sin\frac{x}{2^n}>0$，また　$2x=\frac{\pi}{4}$ より　$\sin 2x>0$

したがって問1の結果で自然対数をとって

$$\log C_n(x)=\log\sin 2x-\log 2^{n+1}-\log\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

また与式より　$C_n(x)=\left\{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right\}C_0(x)$

$$\log C_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\log\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

よって　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\log\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\log\sin 2x-\log 2^{n+1}-\log\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$

両辺を $x$ で微分して

$$\sum_{k=0}^{n}-\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{2}{\tan 2x}-\frac{1}{2^n\tan\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)=-\frac{2}{\tan 2x}+\frac{1}{2^n\tan\left(\frac{x}{2^n}\right)}\quad\cdots①$$

$x=\frac{\pi}{8}$ を代入して $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{\pi}{2^{k+3}}\right)=-2+\frac{1}{2^n\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)}$

ここで，$n\to\infty$ のとき $\frac{\pi}{2^{n+3}}\to 0$ より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2^{n+3}}}{\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)}\times\frac{8}{\pi}=\frac{8}{\pi}$$

だから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{\pi}{2^{k+3}}\right)\right\}=-2+\frac{8}{\pi}$ …(答)

問3．①の両辺を $x$ で微分して

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2^k}\right)}\cdot\frac{1}{2^k}=\frac{2}{\tan^2 2x}\cdot(\tan 2x)'-\frac{1}{2^n\tan^2\left(\frac{x}{2^n}\right)}\left(\tan\frac{x}{2^n}\right)'$$

$$=\frac{4}{\sin^2 2x}-\frac{1}{4^n\sin^2\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)=\frac{4}{\sin^2 2x}-\frac{1}{4^n\sin^2\frac{x}{2^n}}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\tan^2\left(\frac{x}{2^k}\right)=-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}+\frac{4}{\sin^2 2x}-\frac{1}{4^n\sin^2\frac{x}{2^n}}$$

$x=\frac{\pi}{8}$ を代入して

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\tan^2\left(\frac{\pi}{2^{k+3}}\right)=-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}+8-\frac{1}{4^n\sin^2\frac{\pi}{2^{n+3}}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4^n\sin^2\frac{\pi}{2^{n+3}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)^2}{\sin^2\frac{\pi}{2^{n+3}}}\times\frac{2^6}{\pi^2}=\frac{64}{\pi^2}$$

だから

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\tan^2\left(\frac{\pi}{2^{k+3}}\right)=-\frac{4}{3}+8-\frac{64}{\pi^2}=\frac{20}{3}-\frac{64}{\pi^2}\quad\cdots(答)$$

〈講評〉

[I]（標準）

問1：規則に従って漸化式を作る。

問2：問1と $a_n+b_n+c_n=1$ を用いて，$a_{n+3}$ を $n+2 \to n+1 \to n$ と順々に落としていく。

問3：$n$ を $3n$ におきかえて問2の漸化式を解く。

問4：$c_{3n}$ を同様に求め，$b_{3n+1}$ を出し，計算する。

方針もすぐに立つので確実にとる必要がある。

[II]（標準）

複素数の1次分数変換の問題である。

問1：$w$ を $z$ で表して変形するとアポロニウスの円の形が出る。

数字がきたないので，図形でやっても，$w=x+yi$ とおいてもよい。

問2：$w^2$ が実数 $\Leftrightarrow$ $w$ が実数か純虚数がわかれば問1から $z$ が決まる。

問3：$w$ の条件を見つければ問2と同様。

計算を少なくする工夫を考えるとよい。

[III]（やや難）

問1：両辺に $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$ をかけて，等比数列の漸化式が作れる。

問2：与式から $C_n(x)=C_0(x)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2^2}\right)\cdots\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$ となることと問1を用いて，自然対数をとり，$x$ で微分すると $\tan\left(\frac{x}{2^n}\right)$ の形が出る。$x=\frac{\pi}{8}$ とすると $\frac{\pi}{2^{n+3}}$ が作れることと合わせ，整理していけばよい。

問3：問2で微分してできた式（$\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)$ で表された式：①）をもう1度 $x$ で微分すると $\cos^2\left(\frac{x}{2^k}\right)$ から $\tan^2\left(\frac{x}{2^k}\right)$ が作れる。

あとは問2と同じように進めればよい。

とくに，問2，問3はやりにくく，まずは $\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)$ や $\tan^2\left(\frac{x}{2^k}\right)$ を作るにはどうすればよいかを考えていくことになる。