医学部専門予備校　クエスト　解答速報

埼玉医科大学（後期）　数学　　試験日 2 月 28 日（土）

$\boxed{1}$ 問 1.　$g'(x)=3x^2-6ax-9a^2=3(x+a)(x-3a)$

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	$3a$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$x=-a$ で極大値 $g(-a)=-a^3-3a^3+9a^3+b=5a^3+b$

$x=3a$ で極小値 $g(3a)=27a^3-27a^3-27a^3+b=-27a^3+b$

よって、極大値と極小値の差 $g(-a)-g(3a)=32a^3$ が 32 に等しいことから

$32a^3=32$ すなわち $a^3=1$ となり　$a=1$ $\longleftarrow \boxed{1}$

（別解）$g(-a)-g(3a)=\Big[g(x)\Big]_{3a}^{-a}=\displaystyle\int_{3a}^{-a}g'(x)\,dx=-\int_{-a}^{3a}3(x+a)(x-3a)\,dx$

$\quad=\dfrac{3}{6}\{3a-(-a)\}^3=\dfrac{1}{2}\cdot(4a)^3=32a^3$）

$y=f(x)$ のグラフは、$y=g(x)$ のグラフを x 軸方向に $-a$，y 軸方向に $-b$ だけ平行移動したグラフであるから、$a=1$、$g(x)=x^3-3x^2-9x+b$ に注意して、

$$f(x)=g(x-(-a))-b=g(x+1)-b=(x+1)^3-3(x+1)^2-9(x+1)+b-b$$
$$=(x^3+3x^2+3x+1)-3(x^2+2x+1)-9(x+1)=x^3-12x-11$$

$\therefore\ f(x)=x^3-12x-11$ $\longleftarrow \boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6}$

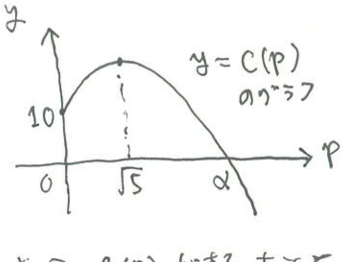
問 2、点 $P(p,\ p^3-12p-11)$ から直線 $3x-y-1=0$ までの距離より

$$h(p)=\frac{|3p-(p^3-12p-11)-1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|-p^3+15p+10|}{\sqrt{10}}$$ となる。

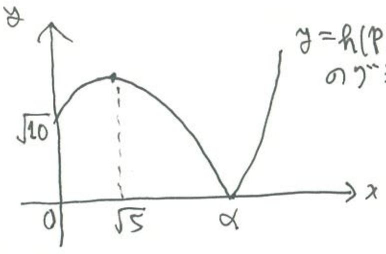
$C(p)=-p^3+15p+10$ とおくと、

$C'(p)=-3p^2+15=-3(p+\sqrt{5})(p-\sqrt{5})$

p	(0)	$\cdots$	$\sqrt{5}$	$\cdots$
$C'(p)$		$+$	0	$-$
$C(p)$		$\nearrow$		$\searrow$



$p>0$ における方程式 $C(p)=0$ の解を α とすると、$y=h(p)$ のグラフは右図のようになり、$p=\sqrt{5}$ で極大となる。



よって、$h(p)$ が極大となる p の値は $p=\sqrt{5}$ $\longleftarrow \boxed{7}$

極大値は $h(\sqrt{5})=\dfrac{|-5\sqrt{5}+15\sqrt{5}+10|}{\sqrt{10}}=5\sqrt{2}+\sqrt{10}$ $\longleftarrow \boxed{8}\boxed{9}\boxed{10}\boxed{11}$

$\boxed{2}$ 問1. $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-(1-x)=\dfrac{1-(1+x)(1-x)}{1+x}=\dfrac{x^2}{1+x}$

よって、$0\leqq x\leqq 1$ で $f'(x)\geqq 0$（等号は $x=0$ でのみ成立）となり、

$f(x)$ は $0\leqq x\leqq 1$ で単調増加するので、その最小値 A は

$$A=f(0)=0 \longleftarrow \boxed{12}$$

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-(1-x+x^2)=\frac{1-(1+x)(1-x+x^2)}{1+x}=\frac{1-(1+x^3)}{1+x}=\frac{-x^3}{1+x}$$

よって、$0\leqq x\leqq 1$ で $g'(x)\leqq 0$（等号は $x=0$ でのみ成立）となり、

$g(x)$ は $0\leqq x\leqq 1$ で単調減少するので、その最大値 B は

$$B=g(0)=0 \longleftarrow \boxed{13}$$

問2. 問1の結果より $0\leqq x\leqq 1$ において $f(x)\geqq 0$ かつ $g(x)\leqq 0$ が成立するので、

$$x-\frac{1}{2}x^2\leqq \log(1+x)\leqq x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3 \quad \text{―― ①}$$

ここで、$x=0.2$ を代入して、

$$\left.\begin{aligned}&0.2-\frac{1}{2}\times 0.2^2=0.2-0.02=0.18\\ &0.2-\frac{1}{2}\times 0.2^2+\frac{1}{3}\times 0.2^3=0.18+\frac{0.008}{3}\end{aligned}\right)\text{①より}$$

$$0.18\leqq \log 1.2\leqq 0.18+\frac{0.008}{3}$$

これより、$\log 1.2$ を小数で表したときの小数第2位の数字は 8 $\longleftarrow \boxed{14}$

問3. $y=\log x$ の連続性より

$$\lim_{x\to+0}\log h(x)=\lim_{x\to+0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log e=1 \longleftarrow \boxed{15}$$

$\log h(x)=\log(1+x)^{\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{x}\log(1+x)$ を微分して、

$$\frac{h'(x)}{h(x)}=-\frac{1}{x^2}\log(1+x)+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x}=\frac{-(1+x)\log(1+x)+x}{x^2(1+x)}$$

$0<x\leqq 1$ において ① が成り立つので、

$$-(1+x)\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right)+x\leqq -(1+x)\log(1+x)+x\leqq -(1+x)\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)+x$$

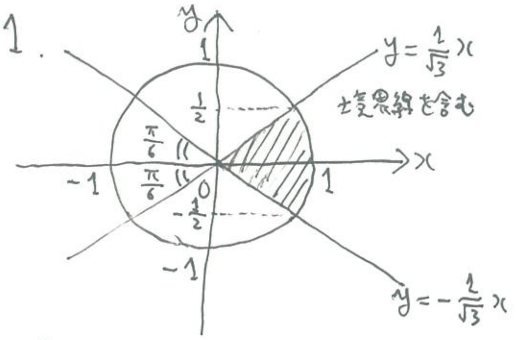
$$\therefore\ -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{3}x^4\leqq -(1+x)\log(1+x)+x\leqq -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3$$

よって、$\dfrac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}x^2}{1+x}\leqq\dfrac{h'(x)}{h(x)}\leqq\dfrac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x}{1+x}$ が成立し、

ここで、$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}x^2}{1+x}=-\frac{1}{2}$, $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x}{1+x}=-\frac{1}{2}$ であるから、

はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{h'(x)}{h(x)}=-\frac{1}{2} \longleftarrow \boxed{16}\ \boxed{17}\ \boxed{18}$

$\boxed{3}$ 問1.



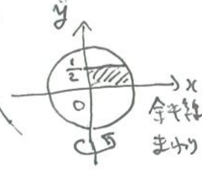
領域Dは左図の斜線部分であり、半径1，中心角$\frac{\pi}{3}$の扇形であるから、

Dの面積は、

$$\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{1}{6}\pi \longleftarrow \boxed{19}\ \boxed{20}$$

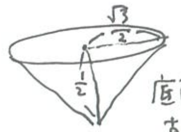
問2. 求める体積をV_1とすると、x軸に関する対称性より、

$V_1 = 2\times\Big($



斜線部をy軸のまわりに回転した体積

$-$



底面の半径$\frac{\sqrt{3}}{2}$，高さ$\frac{1}{2}$の直円錐の体積 $\Big)$

$$= 2\times\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\pi x^2\,dy-\frac{1}{3}\times\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\right)$$

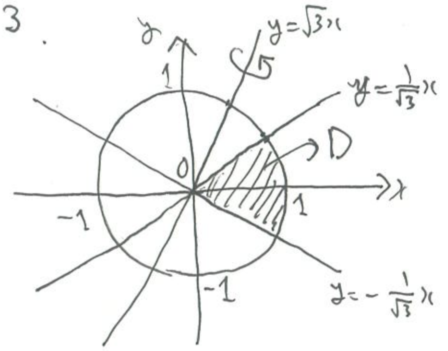
$$= 2\times\left(\pi\int_0^{\frac{1}{2}}(1-y^2)\,dy-\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= 2\times\left(\pi\cdot\left[y-\frac{y^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}}-\frac{\pi}{8}\right)$$

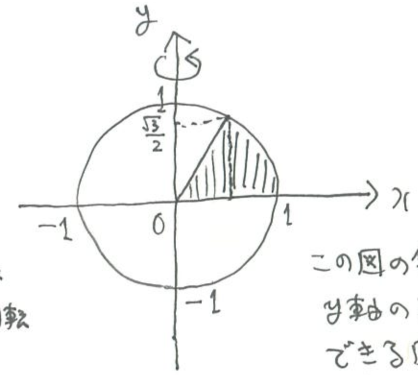
$$= 2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{24}-\frac{1}{8}\right)\pi$$

$$= \frac{2}{3}\pi \longleftarrow \boxed{21}\ \boxed{22}$$

問3.



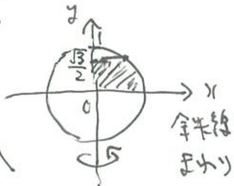
$\longrightarrow$ 原点中心に反時計回りに角$\frac{\pi}{6}$だけ回転



この図の斜線部をy軸のまわりに1回転させてできる回転体の体積を求めればよい。

求める体積をV_2とすると、

$V_2 = \Big($



斜線部をy軸のまわりに回転した体積

$-$

底面の半径$\frac{1}{2}$，高さ$\frac{\sqrt{3}}{2}$の直円錐の体積 $\Big)$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\pi x^2\,dy-\frac{1}{3}\times\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}(1-y^2)\,dy-\frac{\sqrt{3}}{24}\pi$$

$$= \pi\left[y-\frac{y^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{\sqrt{3}}{24}\pi = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{3}}{24}\right)\pi$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\pi \longleftarrow \boxed{23}\ \boxed{24}$$

$\boxed{4}$ 問1． $P(3 \leqq X \leqq 17) = \dfrac{r}{20} \times \dfrac{8}{10} + \dfrac{s}{20} \times \dfrac{10}{10} + \dfrac{t}{20} \times \dfrac{7}{10}$

$= \dfrac{8r + 10s + 7t}{200} \longleftarrow \boxed{25}\boxed{26}\boxed{27}\boxed{28}$

問2． Xが2の倍数となる事象をM，Xが3の倍数となる事象をNとすると，
$M \cap N$はXが6の倍数となる事象で，求める確率は$P(M \cup N)$である．

$$P(M) = \frac{r}{20} \times \frac{5}{10} + \frac{s}{20} \times \frac{5}{10} + \frac{t}{20} \times \frac{5}{10} = \frac{r+s+t}{40} \left(= \frac{20}{40} = \frac{1}{2} \right)$$

$$P(N) = \frac{r}{20} \times \frac{3}{10} + \frac{s}{20} \times \frac{3}{10} + \frac{t}{20} \times \frac{3}{10} = \frac{3(r+s+t)}{200} \left(= \frac{3 \times 20}{200} = \frac{3}{10} \right)$$

$$P(M \cap N) = \frac{r}{20} \times \frac{1}{10} + \frac{s}{20} \times \frac{2}{10} + \frac{t}{20} \times \frac{2}{10} = \frac{r+2s+2t}{200}$$

よって，求める確率は，

$$P(M \cup N) = P(M) + P(N) - P(M \cap N)$$

$$= \frac{r+s+t}{40} + \frac{3(r+s+t)}{200} - \frac{r+2s+2t}{200}$$

$$= \frac{7r + 6s + 6t}{200} \longleftarrow \boxed{29}\boxed{30}\boxed{31}$$

問3． $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{4} k \cdot \frac{r}{20} \cdot \frac{1}{10} + \sum_{k=5}^{10} k \left(\frac{r}{20} \cdot \frac{1}{10} + \frac{s}{20} \cdot \frac{1}{10} \right)$

$$+ \sum_{k=11}^{14} k \left(\frac{s}{20} \cdot \frac{1}{10} + \frac{t}{20} \cdot \frac{1}{10} \right) + \sum_{k=15}^{20} k \cdot \frac{t}{20} \cdot \frac{1}{10}$$

$$= \frac{r}{200} \sum_{k=1}^{10} k + \frac{s}{200} \sum_{k=5}^{14} k + \frac{t}{200} \sum_{k=11}^{20} k$$

$$= \frac{r}{200} \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} + \frac{s}{200} \cdot \frac{10}{2}(5+14) + \frac{t}{200} \cdot \frac{10}{2}(11+20)$$

$$= \frac{11r + 19s + 31t}{40} \longleftarrow \boxed{32} \sim \boxed{39}$$