医学部専門予備校　クエスト　解答速報

聖マリアンナ医科大学（後期）数学　試験日3月3日（火）

$\boxed{1}$ (1) (i) $0<p<q$ より $\dfrac{1}{p}>\dfrac{1}{q}$ … (b)

(A) と合わせて $3\leqq p<q\leqq r\leqq s$ より

$$\frac{1}{p}>\frac{1}{q}\geqq\frac{1}{r}\geqq\frac{1}{s}$$

よって
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}<\frac{1}{p}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p}=\frac{4}{p} \quad \cdots (d)$$
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}>\frac{1}{s}+\frac{1}{s}+\frac{1}{s}+\frac{1}{s}=\frac{4}{s}$$

だから，正しいものは　(b)，(d) …(答)

(ii) $\dfrac{1}{p}<\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{s}\leqq\dfrac{4}{p}$ より $\dfrac{1}{p}<1\leqq\dfrac{4}{p}$　$\therefore 1<p\leqq 4$

さらに $p\geqq 3$ だから $p=3,\ 4$

(ア) $p=3$ のとき　$\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{s}=\dfrac{2}{3}$

同様にして　$\dfrac{1}{q}<\dfrac{2}{3}\leqq\dfrac{3}{q}$　$\therefore \dfrac{3}{2}<q\leqq\dfrac{9}{2}$

$q\geqq 3$ より $q=3,\ 4$

(ア−1) $q=3$ のとき　$\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{3}$

$\dfrac{1}{r}<\dfrac{1}{3}\leqq\dfrac{2}{r}$ より $3<r\leqq 6$ であり，$r\geqq 3$ とから $r=4,5,6$

$r=4$ のとき $s=12$，$r=5$ のとき $s=\dfrac{15}{2}$，$r=6$ のとき $s=6$

(ア−2) $q=4$ のとき　$\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{s}=\dfrac{5}{12}$

$\dfrac{1}{r}<\dfrac{5}{12}\leqq\dfrac{2}{r}$ より $\dfrac{12}{5}<r\leqq\dfrac{24}{5}$ であり $r\geqq 4$ だから $r=4$，$s=6$

(イ) $p=4$ のとき　$\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{s}=\dfrac{3}{4}$

$\dfrac{1}{q}<\dfrac{3}{4}\leqq\dfrac{3}{q}$ より $\dfrac{4}{3}<q\leqq 4$ であり，$q\geqq 4$ とから $q=4$

よって $\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{2}$ 同様にして $r=4,\ s=4$

まとめて

$(p,q,r,s)=(3,3,4,12),\ (3,3,6,6),\ (3,4,4,6),\ (4,4,4,4)$ …(答)

(2) x の平均 $\bar{x}$ は $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=2$，$x$ の分散 s_x^2 は $s_x^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\bar{x})^2=20$

より，$y=\frac{x-1}{2}$ のとき　$\bar{y}=\frac{\bar{x}-1}{2}=\frac{1}{2}$ …(答)，　$s_y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2 s_x^2=\frac{1}{4}\cdot 20=5$ …(答)

$\boxed{2}$ (2) $(*) \Leftrightarrow |z|:|z-\alpha|=3:1$ だから z のみたす図形は

アポロニウスの円で，2点 $0,\alpha$ を結ぶ線分を $3:1$ に内分，外分する点をそれぞれ A, B とすると，図1より

$\overrightarrow{OA}=\frac{3}{4}\overrightarrow{O\alpha}$ より $A\left(\frac{3}{4}\alpha\right)$，$\overrightarrow{OB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{O\alpha}$ より $B\left(\frac{3}{2}\alpha\right)$

線分ABの中点が C の中心 P_1 で，$P_1\left(\frac{9}{8}\alpha\right)$ …(答)

半径は $\frac{AB}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}|\alpha|-\frac{3}{4}|\alpha|\right)=\frac{3}{8}|\alpha|$ …(答)

(1) $\alpha=i$ のとき　C の中心は $\frac{9}{8}i$，半径は $\left|\frac{3}{8}i\right|=\frac{3}{8}$ だから

求める純虚数 z は　$\frac{9}{8}i-\frac{3}{8}i=\frac{3}{4}i$ と $\frac{9}{8}i+\frac{3}{8}i=\frac{3}{2}i$ …(答)

(図2参照)

図1

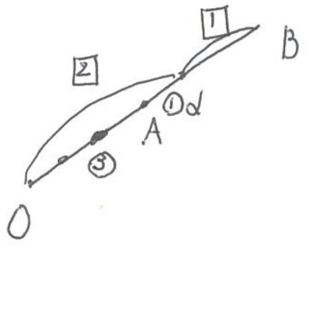
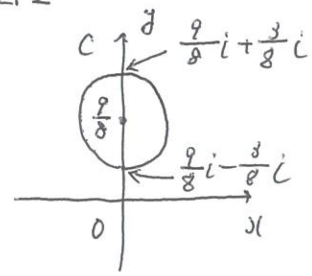


図2



(3) C の方程式は $\left|z-\frac{9}{8}\alpha\right|=\frac{3}{8}|\alpha|$ であり，$Q(i)$ は C 上にあるから，$\left|i-\frac{9}{8}\alpha\right|=\frac{3}{8}|\alpha|$　　$\therefore 3\left|\alpha-\frac{8}{9}i\right|=|\alpha|$

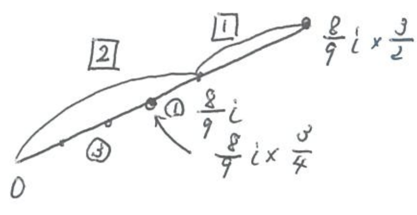
よって $|\alpha|:\left|\alpha-\frac{8}{9}i\right|=3:1$ だから (2) と同様にして，図3より

$P(\alpha)$ 全体のなす図形は，2点 $\frac{2}{3}i$ と $\frac{4}{3}i$ を直径の両端とする円で，

$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}i+\frac{4}{3}i\right)=i$ より　$P_2(i)$ …(答)

$\frac{1}{2}\left|\frac{4}{3}i-\frac{2}{3}i\right|=\frac{1}{3}$ より　半径 $\frac{1}{3}$ …(答)

図3



(4) xy 平面で考える。(3) より α は $x^2+(y-1)^2=\frac{1}{9}$ …① 上にあり

偏角が最大となる点を R とすると 図4より, OR は

円①に接し, $OR^2=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$ だから,

求める α は $x^2+y^2=\frac{8}{9}$ …② もみたす。

②−① より $2y-1=\frac{7}{9}$　∴ $y=\frac{8}{9}$

②に代入して $x^2=\frac{8}{9}-\left(\frac{8}{9}\right)^2=\frac{8}{9}\left(1-\frac{8}{9}\right)=\frac{8}{9^2}$

$x<0$ より $x=-\frac{2\sqrt{2}}{9}$　よって $\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{9}+\frac{8}{9}i$ …(答)

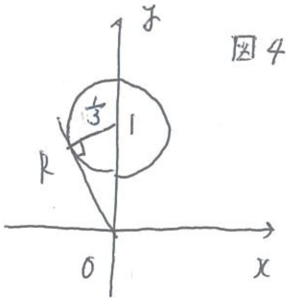


図4

$\boxed{3}$ (1) $\begin{pmatrix}a_n\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n\\1\end{pmatrix}$ より l_n の方向ベクトルとして $\begin{pmatrix}a_n\\1\end{pmatrix}$ がとれるから

l_n のベクトル方程式は $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}a_n\\1\end{pmatrix}$ (t: 実数)

$\begin{pmatrix}1\\-a_n\end{pmatrix}$ との内積をとって $\begin{pmatrix}1\\-a_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-a_n\end{pmatrix}\cdot\left\{\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}a_n\\1\end{pmatrix}\right\}$　∴ $x-a_ny=a_n$ …(答) …①

(2) l_n と直交する直線の法線ベクトルとして, 図1より

$\begin{pmatrix}a_n\\1\end{pmatrix}$ がとれるから, その方程式は $a_n\cdot(x-0)+1\cdot(y-1)=0$

よって $a_nx+y=1$ …② …(答)

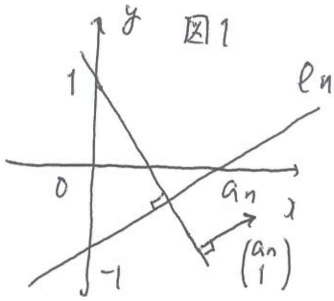


図1

①, ② の交点の x 座標が a_{n+1} である。

①+②×a_n より $(1+a_n^2)x=2a_n$

$1+a_n^2>0$ より $a_{n+1}=\frac{2a_n}{1+a_n^2}$ …(答)

(3) (I) $n=1$ のとき $a_1=\frac{1}{3}$ より $0<a_1<1$ が成り立つ。

(II) $n=k$ のとき $0<a_k<1$ が成り立つとすると, $2a_k>0$, $1+a_k^2>0$ だから

(2) より $a_{k+1}>0$ であり,

$1-a_{k+1}=1-\frac{2a_k}{1+a_k^2}=\frac{(1-a_k)^2}{1+a_k^2}>0$　∴ $1>a_{k+1}$

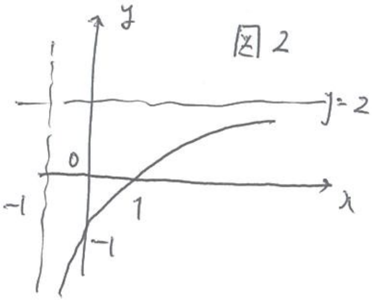
より $0<a_{k+1}<1$ も成り立つ。

(I)(II) より数学的帰納法から, すべての自然数 n に対して $0<a_n<1$

(4)　$a_{n+1}=\dfrac{2^{\theta_{n+1}}-1}{2^{\theta_{n+1}}+1}$ …③ であり，(3) より

$$a_{n+1}=\frac{2a_n}{1+a_n^2}=\frac{2\left(\frac{2^{\theta_n}-1}{2^{\theta_n}+1}\right)}{1+\left(\frac{2^{\theta_n}-1}{2^{\theta_n}+1}\right)^2}=\frac{2(2^{\theta_n}-1)(2^{\theta_n}+1)}{(2^{\theta_n}+1)^2+(2^{\theta_n}-1)^2}=\frac{2\{(2^{\theta_n})^2-1\}}{2\{(2^{\theta_n})^2+1\}}$$

$$=\frac{2^{2\theta_n}-1}{2^{2\theta_n}+1}\quad\cdots④$$



ここで $y=\dfrac{x-1}{x+1}=1-\dfrac{2}{x+1}$ のグラフは

$0<x<1$ で単調増加となるから，③，④ より

$$\theta_{n+1}=2\theta_n\quad\cdots(答)$$

また $a_1=\dfrac{1}{3}$ より $\dfrac{2^{\theta_1}-1}{2^{\theta_1}+1}=\dfrac{1}{3}$　$\therefore 3(2^{\theta_1}-1)=2^{\theta_1}+1$

だから $2^{\theta_1}=2$　$\therefore \theta_1=1$

$\{\theta_n\}$ は公比 2 の等比数列だから　$\theta_{n+1}=2^{n-1}$ …(答)

$\boxed{4}$ (1) $\triangle OAB$ の面積は $\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot1\sin x=\dfrac{1}{2}\sin x$ …(答)

扇形 OAB の面積は $\dfrac{1}{2}\cdot1^2\cdot x=\dfrac{1}{2}x$ …(答)

$AT=\tan x$ より $\triangle OAT$ の面積は $\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot\tan x=\dfrac{1}{2}\tan x$ …(答)

(2) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき (1)の結果と図より

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x\quad\therefore \sin x<x<\frac{\sin x}{\cos x}$$

が成り立つ．$\cos x>0$ より $\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\cos x=1$ より はさみうちの原理を用いて $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1$ …①

$x<0$ のとき $x=-t$ とおくと $x\to-0$ のとき $t\to+0$ だから

$$\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{t\to+0}\frac{\sin(-t)}{-t}=\lim_{t\to+0}\frac{\sin t}{t}=1\quad\cdots②$$

①，② より　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

〈講評〉

$\boxed{1}$ (1)(標準)

不定方程式の有名な問題だから，方針に迷うことはない．
同じことの繰り返しだから，手間がかかるので，手際よく処理できるとよい．

(2)(標準)

平均，分散の変数変換の問題で知っていれば暗算でもできる．

$\boxed{2}$ (標準)

複素数平面上のアポロニウスの円を考える問題で，(1)〜(3)については色々方法はあるが，手早くできる解法を選択できるとよい．
差がつくとしたら(4)で，求める α の位置を偏角や絶対値などでとらえれば求められる．

$\boxed{3}$ (標準)

(1)，(2) 直線の方程式を作る問題で解法は色々ある．

(3) $a_n>0$ と $a_n<1$ に分けて示せばよい．

(4) (2)のシを用いて a_{n+1} を 2^{a_n} で表せばよい．計算が少し間違いやすいが丁寧に計算していけばよい．セはスができれば問題なし．

$\boxed{4}$ (標準)

$\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ の証明で覚えていればすぐ証明できる．

全体的に難しいところはなく，差がつくとすれば公式やその証明を知っているかどうかと，$\boxed{2}$(4)や$\boxed{3}$(4)で解けるかどうかという所である．
75％程度とれるとよい．