医学部専門予備校　クエスト　解答速報

日本大学（医）後期一次試験　数学　　試験日3月4日（水）

Ⅰ(1) $y=-2(x-2)^2+18$ より $A(2,18)$

$-2x^2+8x+10=0$ より $(x+1)(x-5)=0$ 　∴ $x=-1,5$

よって、$B(-1,0)$, $C(5,0)$ としてよいから

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\{5-(-1)\}\cdot 18=54$$ （答） $\boxed{1}\boxed{2}$

(2) Aの得点の平均 $\overline{x_A}=\frac{1}{5}(1+2+3+4+5)=3$

Aの得点の分散 $S_A=\frac{1}{5}\{(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2\}=2$

∴ Aの得点の標準偏差 $S_A=\sqrt{2}$

同様なので、Bの得点の標準偏差 $S_B=\sqrt{2}$

A, Bの得点の共分散 $S_{AB}=\frac{1}{5}\{(2-3)(3-3)+(1-3)(2-3)+(5-3)(5-3)+(3-3)(1-3)+(4-3)(4-3)\}$

$$=\frac{1}{5}(0+2+4+0+1)=\frac{7}{5}$$

∴ A, Bの得点の相関係数 $r_{AB}=\frac{S_{AB}}{S_A\cdot S_B}=\frac{\frac{7}{5}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{7}{10}=0.7$ （答） $\boxed{3}$. $\boxed{4}$

(3) 「$x\neq 2 \Longrightarrow x^2\neq 4$」は偽　（反例：$x=-2$）

「$x^2\neq 4 \Longrightarrow x\neq 2$」の対偶は「$x=2 \Longrightarrow x^2=4$」であり真

よって、当てはまるものは ①　（答）　$\boxed{5}$

(4) 2数をα, βとすると $\begin{cases}\alpha+\beta=4\\ \alpha\beta=\frac{9}{2}\end{cases}$ で、α, βを2解にもつ2次方程式の1つは

$(x-\alpha)(x-\beta)=0$ すなわち $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ より $x^2-4x+\frac{9}{2}=0$

よって、$2x^2-8x+9=0$ を解の公式で解いて $x=\frac{4\pm\sqrt{2}i}{2}$ （答） $\boxed{6}\ \boxed{7}\ \boxed{8}$

(5) $\overrightarrow{AG}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}$, $\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{4}$ より

$\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AD}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{4}\right)\overrightarrow{AC}=\frac{1}{12}\overrightarrow{AB}-\frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$ （答） $\boxed{9}$ ～ $\boxed{14}$

II (1) $a_{10}=\sum_{k=1}^{10}k=\frac{10\cdot 11}{2}=55$ (答) $\boxed{15}\boxed{16}$

(2) $a_n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ より，$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$ とおくと．

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

よって．$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$ より $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=2$ (答) $\boxed{17}$

III (1) $f(x)=4\cos^2\frac{x}{2}-\cos 2x+\frac{1}{2}=4\cdot\frac{1+\cos x}{2}-(2\cos^2 x-1)+\frac{1}{2}$

$=-2\cos^2 x+2\cos x+\frac{7}{2}=-2\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2+4$ (答) $\boxed{18}$ ～ $\boxed{22}$

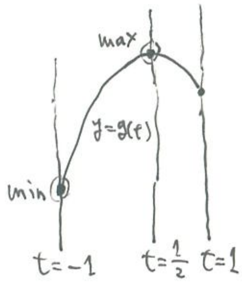
(2) $t=\cos x$ とおくと．tの値域は $-1\leqq t\leqq 1$ であり $f(x)=-2t^2+2t+\frac{7}{2}$

よって．$-1\leqq t\leqq 1$ における $g(t)=-2t^2+2t+\frac{7}{2}=-2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+4$ の値域を求めればよい。

$g(-1)=-2-2+\frac{7}{2}=-\frac{1}{2}$，$g\left(\frac{1}{2}\right)=4$

であるから、グラフを考えて、求める値域は

$-\frac{1}{2}\leqq y\leqq 4$ (答) $\boxed{23}$ ～ $\boxed{26}$



IV (1) $a=\frac{5}{2}$ のとき ① は $4^x-5\cdot 2^x+4=0$ すなわち $(2^x-1)(2^x-4)=0$ となるので

$2^x=1,4$ したがって、$x=0,2$ (答) $\boxed{27}\boxed{28}$

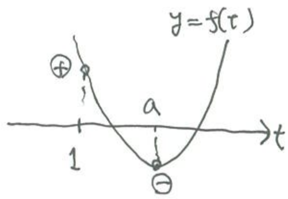
(2) $2^x=t$ とおくと、実数の定数tに対して xの方程式 $2^x=t$ の正の解の個数は

$\begin{cases} t>1 \text{ のとき1個} \\ t\leqq 1 \text{ のとき0個} \end{cases}$ であり、① は $t^2-2at+4=0$ となるので、

2次方程式 $t^2-2at+4=0$ が $t>1$ の範囲に異なる2つの実数解をもつための

aの条件を求めればよい。 $f(t)=t^2-2at+4=(t-a)^2-a^2+4$ とおいて、

$y=f(t)$ とt軸の共有点を考えると、条件は



$\begin{cases} \text{軸}: a>1 \\ f(a)=-a^2+4<0 \quad (\text{判別式 } D/4=a^2-4>0 \text{ でもOK}) \\ f(1)=-2a+5>0 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} a>1 \\ a<-2 \text{ または } 2<a \\ a<\frac{5}{2} \end{cases}$ したがって、$2<a<\frac{5}{2}$ (答) $\boxed{29}$ ～ $\boxed{31}$

V (1) 全事象は ${}_{10}C_4=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=10\cdot 3\cdot 7$ 通り

a は 1～4 の ${}_4C_1=4$ 通り
c, d は 6～10 から 2 枚選ぶ ${}_5C_2=10$ 通り
の取り方があるので、

求める確率は $\dfrac{{}_4C_1\cdot{}_5C_2}{{}_{10}C_4}=\dfrac{4\cdot 10}{10\cdot 3\cdot 7}=\dfrac{4}{21}$（答）$\boxed{32}$ ～ $\boxed{34}$

(2) a, d の取り方は $(a, d)=(1,6)$, $(2,7)$, $(3,8)$, $(4,9)$, $(5,10)$ の 5 通りあり、
そのそれぞれに対して、b, c は a と d の間の 4 個から 2 個を取り出せばよいので
${}_4C_2=6$ 通りあるので、

求める確率は $\dfrac{5\cdot{}_4C_2}{{}_{10}C_4}=\dfrac{5\cdot 6}{10\cdot 3\cdot 7}=\dfrac{1}{7}$（答）$\boxed{35}$ $\boxed{36}$

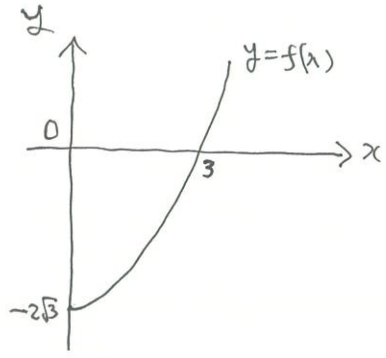
VI (1) $f(x)=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{3}$ より $f'(x)=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ である。

$f(x)=0$ より $x^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}$ となり x は実数より $x=3$　∴ $A(3, 0)$

$f'(3)=\sqrt{3}$ より、点 $A(3, 0)$ における $y=f(x)$ の接線の方程式は $y=\sqrt{3}(x-3)$ となり、
これと y 軸の交点を B とすると $B(0, -3\sqrt{3})$ である。

よって、求める面積は △OAB の面積より $\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\sqrt{3}=\dfrac{9}{2}\sqrt{3}$（答）$\boxed{37}$ ～ $\boxed{39}$

(2) $f(x)\leqq 0$ より $x^{\frac{2}{3}}\leqq 3\sqrt{3}$ であるから $x\leqq 3$ であり、
定義域は $x\geqq 0$、$y=f(x)$ は $f'(x)=\sqrt{x}\geqq 0$ より単調増加
であるから、グラフは右図のようになり、$y\leqq 0$ の部分は
$0\leqq x\leqq 3$ の部分である。よって、求める長さを L とすると、



$$L=\int_0^3\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_0^3\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}\,dx=\int_0^3\sqrt{1+x}\,dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3=\frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}}-1\right)=\frac{14}{3}\text{（答）}\ \boxed{40}\ \text{～}\ \boxed{42}$$

(3) 求める体積を V とすると、

$$V=\int_{-2\sqrt{3}}^{0}\pi x^2\,dy=\int_0^3\pi x^2\frac{dy}{dx}\,dx=\int_0^3\pi x^2 f'(x)\,dx=\Big[\pi x^2 f(x)\Big]_0^3-\int_0^3 2\pi x f(x)\,dx$$

$=-\displaystyle\int_0^3 2\pi x f(x)\,dx$（いわゆるバウムクーヘン分割を利用して、この式から出発してもよい。）

$$=-2\pi\int_0^3\left(\frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}}-2\sqrt{3}x\right)dx=-2\pi\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-2\sqrt{3}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^3$$

$$=-2\pi\left(\frac{4}{7}\cdot 9\sqrt{3}-9\sqrt{3}\right)=\frac{54}{7}\sqrt{3}\,\pi\text{（答）}\ \boxed{43}\ \text{～}\ \boxed{46}$$