医学部専門予備校　クエスト　解答速報

昭和医科大学（Ⅱ期）　数学　　試験 3 月 7 日（土）

1 (1) 二項定理より $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k x^k = (1+x)^n$ …①

$x=1$ を代入して $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k = (1+1)^n = 2^n$ …((a)の答)

(2) ① の両辺を x で微分して

$$\sum_{k=1}^{n} {}_nC_k \cdot k x^{k-1} = n(1+x)^{n-1} \qquad (\because (x^0)' = (1)' = 0)$$

$k=0$ のとき ${}_nC_k \cdot kx^{k-1}=0$ となるから

$$\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cdot k x^{k-1} = n(1+x)^{n-1} \quad \cdots ②$$

$x=1$ を代入して

$$\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cdot k = n \cdot 2^{n-1} = n \times \frac{2^n}{2} \quad \cdots ((b)の答)$$

(3) ② の両辺に x をかけて

$$\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cdot k x^{k} = nx(1+x)^{n-1}$$

両辺を x で微分して

$$\sum_{k=1}^{n} {}_nC_k \cdot k^2 x^{k-1} = n(1+x)^{n-1} + nx(n-1)(1+x)^{n-2}$$

$k=0$ のとき ${}_nC_k \cdot k^2 x^{k-1}=0$ となるから

$$\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cdot k^2 x^{k-1} = n(1+x)^{n-2}\{(1+x)+x(n-1)\}$$

$$\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cdot k^2 x^{k-1} = n(1+nx)(1+x)^{n-2} \quad \cdots ③$$

$x=1$ を代入して

$$\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cdot k^2 = n(n+1) \cdot 2^{n-2} \quad \cdots ((c)の答)$$

(4) ③ の両辺に x をかけて

$$\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k k^2 x^{k} = n(x+nx^2)(1+x)^{n-2}$$

両辺を x で微分して

$$\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cdot k^3 x^{k-1} = n(1+2nx)(1+x)^{n-2} + n(x+nx)(n-2)(1+x)^{n-3}$$

$x=1$ を代入して

$$\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cdot k^3 = n(1+2n)\cdot 2^{n-2} + n(1+n)(n-2)\cdot 2^{n-3}$$

$$= n\cdot 2^{n-3}\{(1+2n)\times 2 + (1+n)(n-2)\} = n^2(n+3)\cdot\frac{2^n}{2^3} \quad \cdots((d)\text{の答})$$

2 (1) (1-1) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ より

$$\frac{\sqrt{2025}-\sqrt{1}}{2025-1} = \frac{1}{2\sqrt{c}} \qquad \therefore \sqrt{c} = 23$$

よって，$c=529$ となり $1<c<2025$ をみたす．　$c=529$ …(答)

(1-2) $x \fallingdotseq 2025$ のとき $f(x) \fallingdotseq f(2025) + f'(2025)(x-2025)$

$f(x)=\sqrt{x}$ として $x=2025+1$ を代入すると

$$\sqrt{2025+1} \fallingdotseq 45 + \frac{1}{2\cdot 45}\cdot 1 = 45 + \frac{1}{90} = 45.01111\cdots$$

（$\frac{1}{9}=0.111\cdots$ を用いて）

よって　$\sqrt{2025+1} \fallingdotseq 45.0111$ …(答)

(2) $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ の両辺を x で微分して

$$x - \frac{y}{2}\cdot\frac{dy}{dx} = 0 \quad \cdots ①$$

$y \neq 0$ より　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{y}$ …(答)

① の両辺を x で微分して

$$1 - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2}\,\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

$$1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{y}\right)^2 = \frac{y}{2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} \qquad \therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y^2-4x^2}{y^3}$$

ここで，$\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ より $2y^2 - 4x^2 = -8$

よって，$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-8}{y^3}$ …(答)

(3) $\int_1^{e^2} t^{-t} f'(t)\,dt = A$ とおくと　$f(x) = 1 + x^x + A$

ここで, $y = x^x\ (x > 0)$ の両辺の自然対数をとって

$\log y = x \log x$

両辺を x で微分して　$\dfrac{y'}{y} = \log x + 1$　$\therefore y' = x^x(\log x + 1)$

すなわち　$f'(x) = x^x(\log x + 1)$

$A = \int_1^{e^2} t^{-t} \cdot t^t (\log t + 1)\,dt = \Big[t \log t\Big]_1^{e^2} = 2e^2$

よって　$f(x) = x^x + 2e^2 + 1$　…(答)

(4) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおくと, 点 C は平面 OAB 上の点だから

$\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$　(s, t は実数) とおける.

$\vec{a} \cdot \vec{c} = 2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ より　$s|\vec{a}|^2 + t\,\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$　$\therefore 5s + 4t = 2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ …①

$\vec{b} \cdot \vec{c} = 1 + \sqrt{2}$ より　$s\,\vec{a} \cdot \vec{b} + t|\vec{b}|^2 = 1 + \sqrt{2}$　$\therefore 4s + 5t = 1 + \sqrt{2}$ …②

(① + ②) × $\dfrac{4}{9}$ より　$4s + 4t = \dfrac{4}{3} + \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ …③

① − ③ より　$s = \dfrac{2}{3} - \dfrac{\sqrt{2}}{6}$,　② − ③ より　$t = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

よって $|\overrightarrow{OC}|^2 = \vec{c} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot (s\vec{a} + t\vec{b}) = s\,\vec{a} \cdot \vec{c} + t\,\vec{b} \cdot \vec{c}$

$= \left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{\sqrt{2}}{6}\right)\left(2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\dfrac{1}{3} + \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)(1 + \sqrt{2}) = \dfrac{3}{2}$　…(答)

であり,

$|\overrightarrow{BA}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 5 - 8 + 5 = 2$　$\therefore |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{2}$

$|\overrightarrow{BC}|^2 = |\vec{c} - \vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{b}|^2 = \dfrac{3}{2} - 2(1 + \sqrt{2}) + 5 = \dfrac{9 - 4\sqrt{2}}{2}$

$|\overrightarrow{BC}| = \dfrac{\sqrt{9 - 2\sqrt{8}}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{8} - 1}{\sqrt{2}} = \dfrac{4 - \sqrt{2}}{2}$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$

$= \left(2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - (1 + \sqrt{2}) - 4 + 5 = \dfrac{4 - \sqrt{2}}{2}$

だから

$\cos\angle ABC = \dfrac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$　…(答)

$\boxed{3}$ (1) $C_1 : x^2+\frac{y^2}{3}=a^2 \cdots ①$, $C_2 : \frac{x^2}{3}+y^2=a^2 \cdots ②$

①+② より $\frac{4}{3}x^2+\frac{4}{3}y^2=2a^2$ $\therefore x^2+y^2=\frac{3}{2}a^2 \cdots ③$

①−② より $\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}y^2=0$ $\therefore x^2=y^2 \cdots ④$

③, ④ より $x^2=y^2=\frac{3}{4}a^2$

よって交点の座標は

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}a, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}a, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a, -\frac{\sqrt{3}}{2}a, 0\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, -\frac{\sqrt{3}}{2}a, 0\right) \cdots$(答)

(2) ② より $y^2=a^2-\frac{x^2}{3}$, $y \geqq 0$ のとき $y=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3a^2-x^2}$

対称性より，図1の斜線部の面積は $\frac{S}{8}$ だから，

$$\frac{S}{8}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\sqrt{3a^2-x^2}\,dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

図2 より $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\sqrt{3a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}(\sqrt{3}a)^2\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{3}{2}a=\frac{\pi}{4}a^2+\frac{3\sqrt{3}}{8}a^2$

よって $\frac{S}{8}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{4}a^2+\frac{3\sqrt{3}}{8}a^2\right)-\frac{3}{8}a^2=\frac{\pi}{4\sqrt{3}}a^2$

したがって $S=8\cdot\frac{\pi}{4\sqrt{3}}a^2=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi a^2 \cdots$(答)

図1

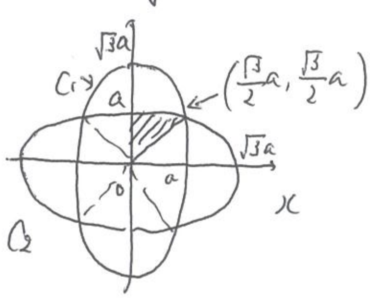
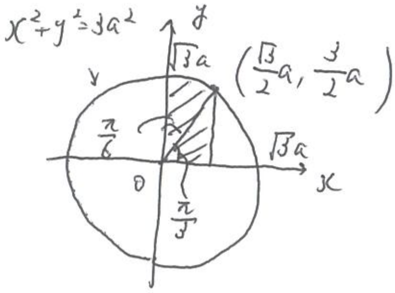


図2



(3) $\triangle POQ$ が回転してできる立体は底面積 S，高さ a の錐体だから

$$V=\frac{1}{3}Sa=\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi a^3 \cdots (答)$$

$\boxed{4}$ 4つの箱をA，B，C，Dとする．

(1) A，B，C，Dの中の1つの箱に賞品が入っているから，
X君が賞品を獲得できる確率は $\dfrac{1}{4}$ …(答)

(2) X君の選んだ箱をA，Y君の選んだ箱をBとする．
箱Aを開ける前に，箱Bに賞品が入っていないし，その後，
X君は選択をかえてもよいから，X君は3つの箱A，C，Dから
1つの箱を選ぶことと同じである．どの箱に賞品が入っているかは同様に確からしい．

(2−1) 選択をかえないときにX君が賞品を獲得できるのはAに
賞品が入っているときだから，その確率は $\dfrac{1}{3}$ …(答)

(2−2) BやCに賞品が入っている確率もそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ だから，
BかCに選択をかえてX君が賞品を獲得できる確率は $\dfrac{1}{3}$ …(答)

(3) X君が選んだ箱をA，Y君が見せた賞品の入っていない2つの
箱をB，Cとすると，賞品の入っている箱はAかCである．

(3−1) 選択をかえないでX君が賞品を獲得できるのはもともと
Aに賞品が入っているときだから，その確率は $\dfrac{1}{4}$ …(答)

(3−2) 選択をかえてA以外を選べばB，Cは選ばないから，
必ずDを選ぶことになる．すなわち，必ず賞品を獲得できる．
よって選択をかえてX君が賞品を獲得できるのは，Aを選ば
ないことと同じだから，求める確率は $1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$ …(答)

〈講評〉

$\boxed{1}$ 二項係数の和に関する問題で，(2)なら ${}_nC_k \cdot k = n\,{}_{n-1}C_{k-1}$ を用いてもできるが，(3)，(4)は微分を使うことになり，k^2 や k^3 を作るには微分の前に x をかける必要がある．標準レベルである．

$\boxed{2}$ (1) 平均値の定理，1次近似式の問題で，1次近似式はあまり使わないので忘れやすいが，(1-1)の式から連想できれば作れるだろう．標準レベルである．

(2) 陰関数の微分で，標準レベルである．

(3) 定積分で表された関数で，対数微分法を使う問題である．計算はそれほど多くないので，標準レベルである．

(4) ベクトルの内積の問題で，方針は立てやすいが，計算が多いので，ミスに気を付けてやることになる．手間がかかるから標準レベルの難しい方である．

$\boxed{3}$ (1)(2)は2つの楕円で囲まれた面積で標準的である．

(3)の体積は三角形を z 軸のまわりに回転させた立体であるが，円錐などと同じなので，体積は底面積と高さから計算できる．標準のやや上のレベルである．

$\boxed{4}$ 確率の問題である．(1)は基本，(2)(3)は問題の解釈がポイントである．(2)では3つの箱から1つを選ぶことだと読み取り，(3)ではX君が選んだ箱以外を選択すれば必ず賞品を獲得できることを読み取る．(2)(3)は考え方がやや難である．

全体として60%～65%ぐらい必要だと思われる．